

## 2. СТАНДАРДНИ СИГНАЛИ И ПРИМЈЕНА ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Модел објекта управљања је задовољавајући ако су реакције модела и процеса блиске за иста вањска дјеловања. Вањска дјеловања (улази) су управљачки сигнали и сигнали поремећаја. Пожељно је да се блискост понашања модела и објекта анализира и испита за произвољне вриједности ових сигнала. Међутим овакво поређење није практично изводљиво. Из тог разлога су од интереса такозвани *стандардни сигнали*. Они требају да задовоље више услова од којих су неки међусобно контрадикторни:

- Да се могу представити једноставним функцијама времена (тима је једноставнија анализа и реализација таквог дјеловања на објекат)
- Да су довољно комплексни да се на основу одзива објекта на такво дјеловање може закључити о његовом понашању за друге облике улаза
- Облика блиског сигналима који дјелују на објекат у његовом номиналном режиму

Сигнали који задовољавају горње услове су:

- Сигнал јединичног скока
- Импулсна функција
- Линеарна (рампа) функција
- Синусна функција.

Наведени сигнали су најчешћи и посебно ће бити разматрани.

### Сигнал јединичног скока

Ово је сигнал који је најлакше генерисати и графички представити. Многи улазни сигнали објекта управљања се могу приближно апроксимирати овом функцијом (укључивање напона у електричном колу, скоковита промјена силе у механичком систему, закрет кормила брода у циљу промјене правца). Претпоставка је да овај сигнал има вриједност један од тренутка посматрања ( $t=0$ ) што је дато на Сл. 2.1. Овај сигнал се обично описује са:

$$f(t) = \begin{cases} 1: & t > 0 \\ 0: & t < 0 \end{cases}$$

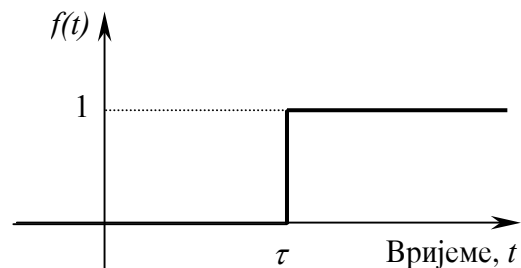


Сл. 2.1 Функција јединичног скока

Треба примјетити да функција није дефинисана за  $t=0$ , јер је претпоставка да се у том тренутку вриједност скоковито промјени са нула на један. То представља математичку идеализацију јер је за такву промјену неопходно неко, ма колико кратко, вријеме.

Функција се често означава и са  $I(t)$ .

Напомена. Од интереса је навести и закашњену јединичну функцију за вриједност  $\tau$ , гдје је  $\tau$  константа. Ова функција се записује у облику  $I(t-\tau)$ , а представљена је графички на Сл. 2.2



Сл. 2.2 Функција јединичног скока закашњена за  $\tau$

### Импулсна функција (Импулсни сигнал)

Ова функција се једноставно добије деривирањем функције јединичног скока. За лакше разумијевање облика ове функције погодно је поћи од њене апроксимације дате на Сл. 2.3. Ова апроксимација одговара разлици двије одскочне функције са скоком  $1/\varepsilon$  при чему је друга закашњена за  $\varepsilon$  у односу на прву. У граничном случају када  $\varepsilon$  тежи вриједности нула добија се импулсна функција. Она се обично означава са  $\delta$  и пише у облику:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta^*(t) = \begin{cases} 0; & t \neq 0 \\ \infty; & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$



Сл. 2.4 Графички приказ импулсне функције

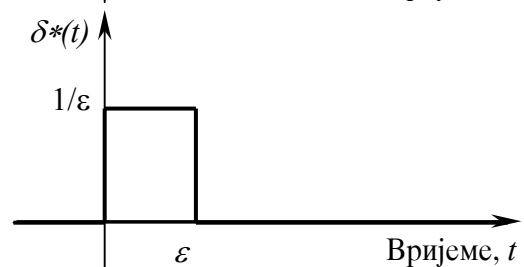
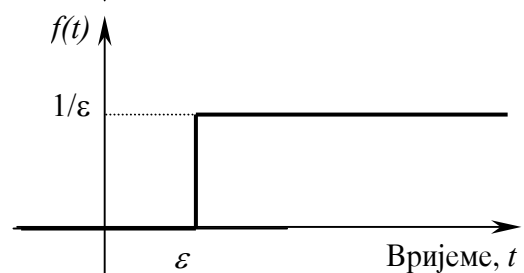
Из задњег се види да функција има бесконачну вриједност за  $t=0$  али је истовремено површина испод функције коначна и једнака 1. Она се графички обично представља као на Сл. 2.4. Без обзира на неуобичајену математичку дефиницију ова функција је погодна за апроксимацију неких сигнала. Сигнали интензивних сметњи који су врло кратког трајања (снажни али кратки удари вјетра на летјелицу, краткотрајан кратак спој у електричној мрежи и слично) могу се доста успјешно апроксимирати овом функцијом.

### Линеарна (рампа) функција

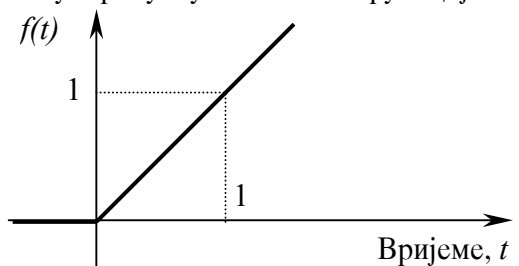
Ако се узме интеграл јединичне одскочне функције добије се функција чија вриједност расте линеарно у времену од вриједности нула, коју има у тренутку  $t=0$ . Ова функције се представља изразом:

$$f(t) = \begin{cases} t; & t > 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Очигледно се такође може представити са:  $f(t)=tI(t)$ . Графички је ова функција представљена на Сл. 2.5. Са дијаграма је очигледно зашто се ова функција назива и брзинском функцијом. Она је погодна за представљање сигнала који се карактеришу константном промјеном (угао закрета осовине мотора која се обрће константном брзином). Специфичност ове функције је то што са временом њена вриједност тежи према бесконачности.



Сл. 2.3 Апроксимација импулсне функције



Сл.2.5 Графички приказ линеарне функције

### Експоненцијална функција

Полази се од експоненцијалне функције

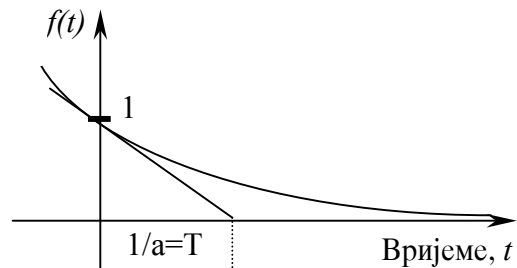
$$f(t) = e^{-at}; \quad a > 0; \quad e \approx 2.718.$$

Тангента на криву у  $t=0$  има нагиб одређен према:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(e^{-at})}{dt} \right|_{t=0} = -a.$$

Како је експонент неименован број згодно је усвојити  $T=1/a$ , јер се добије константа која има димензију времена. Тада је:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{T}.$$



Сл.2.6 Експоненцијална функција

Очигледно за веће вриједности  $T$  функција  $f(t)$  има спорију промјену (опадање према стационарној вриједности). Вриједи и обрнуто за познат облик  $f(t)$  може се одредити вриједност  $T$ . Функција је графички представљена на Сл. 2.6.

Функција је очигледно различита од нуле за  $t < 0$ , па је од већег практичног значаја њена модификација дата са:

$$f(t) = (1 - e^{-t/T}) \mathbf{1}(t); \quad T > 0.$$

График ове функцију је дат на Сл. 2.7. Тангента на криву у  $t=0$  има нагиб одређен према:

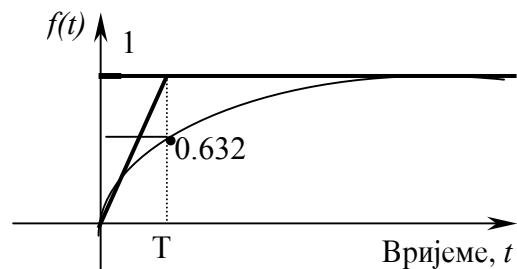
$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(1 - e^{-t/T})}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}.$$

Очигледно за веће вриједности  $T$  функција  $f(t)$  има спорији пораст према стационарној вриједности. Вриједи и обрнуто; за познат облик  $f(t)$  може се одредити вриједност  $T$ . Такође из израза:

$$f(T) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$$

се види да функција за  $t=T$  има вриједност 63.24% од вриједности  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

(стационарног стања).



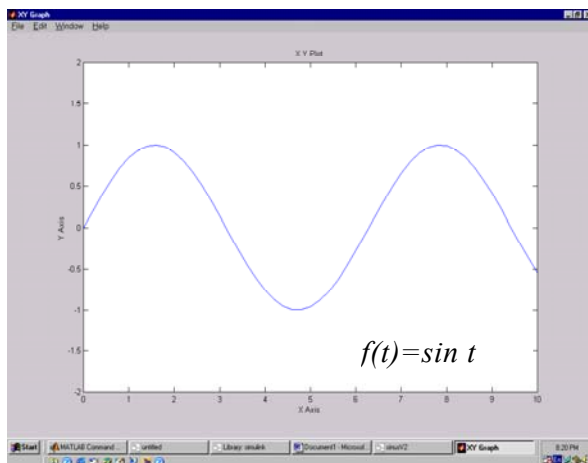
Сл.2.7 Експоненцијална функција

### Синусна функција

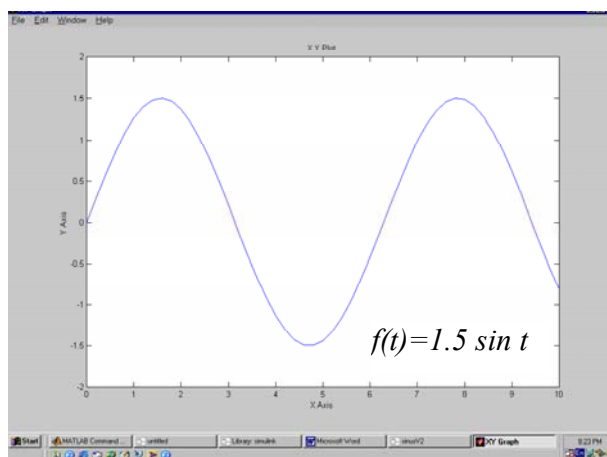
Ова функција у случају јединичне амплитуде се може написати у облику:

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t; & t > 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

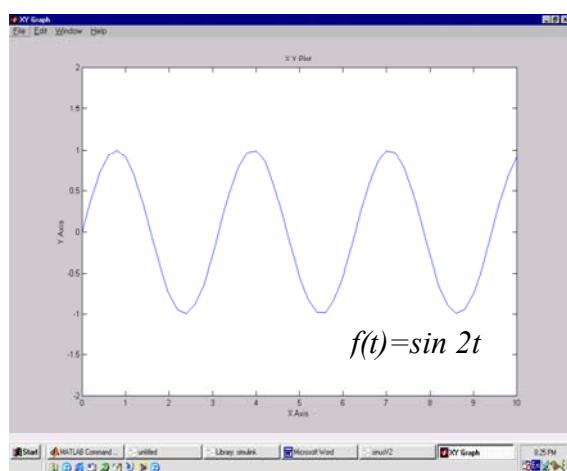
Функција је основа за комплетну фреквенцијску анализу. Феномен осциловања промјенљиве било да се ради о улазном дјеловању, сметњи или сигналу који генерише сам систем од посебног су интереса. Величине битне за комплетно представљање ових функција су: амплитуда, фреквенција и фазни помак. У односу на основну функцију (са јединичном амплитудом, јединичном фреквенцијом и нултим фазним помаком) на Сл. 2.8 - 2.11 су дати прикази исте за: амплитуду 1.5, двоструко већу фреквенцију и фазно кашњење за један радијан, респективно.



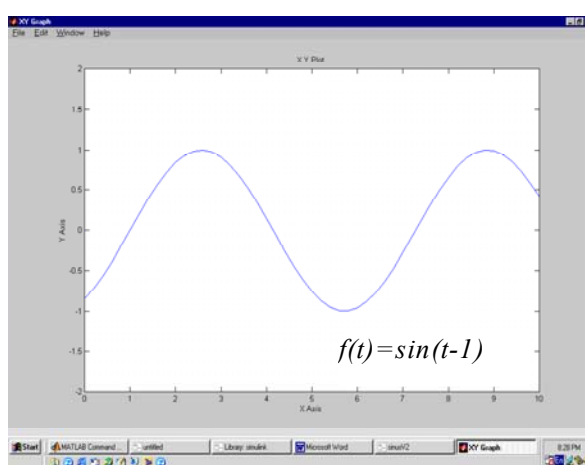
Сл.2.8



Сл.2.9



Сл.2.10



Сл.2.11

### Напомена

Режим осцилација са константном амплитудом је само специјалан случај режима осциловања са промјенљивом амплитудом (растућом или опадајућом).

## 2.1. ЛАПЛАСОВА (*LAPLACE*) ТРАНСФОРМАЦИЈА

Проблеми анализе и синтезе сваког динамичког елемента/ система редовно су везани за рјешавање диференцијалних једначина. Један од најједноставнијих поступака рјешавања тих једначина је везан за примјену Лапласове трансформације. Из тог разлога ће се кратко дати теоретске основе ове трансформације и неке једноставније примјене.

Деф.

За посматрани континуалан сигнал (функцију)  $f(t), 0 \leq t < \infty$ , Лапласова трансформација је дефинисана са

$$\ell\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

Након операције интеграције нестаје независна промјенљива  $t$ , па остаје само зависност од промјенљиве  $s$ . Комплексна промјенљива  $s = \sigma + j\omega$  је таква да израз  $e^{-st}$  у задњој једначини представља пригушење. Наведени интеграл ће конвергирати ако реална вриједност

промјенљиве  $s$  задовољава услов  $\sigma > \sigma_a$ , гдје је  $\sigma_a$  реална позитивна константа за коју вриједи

$$\int_0^{\infty} e^{-s_a t} |f(t)| dt < \infty.$$

За већину сигнала у системима управљања се не мора посебно водити рачуна о овом проблему. Уведена трансформација преводи функцију  **$f(t)$ -оригинал** дефинисану у времену у комплексно подручје  **$F(s)$ -слика**. Напоменимо још да је трансформација ограничена на функције које задовољавају  $f(t)=0, t < 0$ . Такве се функције називају каузалним.

За познату функцију  $F(s)$  коришћењем инверзне Лапласове трансформације могуће је одредити оригинал према

$$\ell^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} F(s) ds$$

Користећи дефинициони израз може се одредити Лапласова трансформација функција  $f(t)$  које се појављују у системима. За сложеније оригинале је рачунање дефиниционог интеграла сложено. Из тог разлога се одређивање Лапласове трансформације сложенијих функција своди на израчунавање преко трансформације елементарних функција уз коришћење правила која вриједје за Лапласову трансформацију.

### Лапласова трансформација елементарних функција

-Функција јединичног скока.

У складу са дефиницијом Лапласове трансформације вриједи:

$$F(s) = \ell\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} 1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (e^{-\infty} - e^{-0}) = \frac{1}{s}$$

Напомена.

На исти начин се може показати да за Лапласову трансформацију одскочне функције нејединичног скока  $a$  вриједи.

$$\ell\{a 1(t)\} = F(s) = \frac{a}{s}.$$

-Импулсна функција

Према дефиницији Лапласове трансформације и импулсне функције вриједи:

$$F(s) = \ell\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

На сличан начин се могу одредити Лапласове трансформације сложенијих функција. У тим случајевима могуће су рачунске грешке код израчунавања одговарајућих интеграла. Из тог разлога се често користе таблице Лапласових трансформација елементарних функција.

Таблица Лапласове трансформације елементарних функција

Уобичајени назив функције	$f(t)$	$F(s)$
Импулсна функција	$\delta(t)$	1
Јединична одскочна функција	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
Експоненцијална функција	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
Синусна функција	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
Косинусна функција	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

## Особине Лапласове трансформације

1. Линеарност:  $\ell\left\{\sum_{i=1}^l a_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^l a_i F_i(s)$
2. Временско (транспортно) кашњење  $\ell\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$
3. Помјерање комплексног лика (пригушење оригинала)  $\ell\{e^{-at} f(t)\} = F(s + a)$
4.  $\ell$  – трансформација извода:  $\ell\left\{\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right\} = s^k F(s) - \sum_{i=1}^k s^{k-i} \frac{d^{i-1} f(t)}{dt^{i-1}} \Big|_{t=0}$  Специјално у случају првог извода је очигледно:  $\ell\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(t) \Big|_{t=0}$
5.  $\ell$  – трансформација интеграла:  $\ell\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$
6. Извод комплексног лика  $\frac{d^k F(s)}{ds^k} = (-1)^k \ell\{t^k f(t)\}$ . Исто својство се често користи у облику тако да одговара множењу оригинала линеарном функцијом. Тада је претходну једначину згодно трансформисати на  $\ell\{t^k f(t)\} = (-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k}$ .  
Специјално за  $k=1$  вриједи  $\ell\{t f(t)\} = (-1) \frac{dF(s)}{ds}$
7. Теорема почетне вриједности  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
8. Теорема коначне вриједности  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
9.  $\ell$  – трансформација конволуције  $\ell\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right\} = F_1(s) F_2(s)$
10. Лапласова трансформација производа функција  
$$\ell\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(\zeta) F_2(s - \zeta) d\zeta$$

## Одредити Лапласову трансформацију функција датих у наредним примјерима

### Примјер 2.1

$$f(t) = a + bt + ct^2, \quad a, b, c = \text{const.}$$

Рјешење

$$\ell\{f(t)\} \stackrel{o1}{=} \ell\{a1(t)\} + \ell\{bt\} + \ell\{ct^2\}$$

$$\ell\{bt\} = b \ell\{t1(t)\} \stackrel{o6}{=} b \frac{-d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds} = b \frac{1}{s^2}$$

$$\ell\{ct^2\} = c \ell\{t * t\} \stackrel{o6}{=} c \frac{-d\left(\frac{1}{s^2}\right)}{ds} = c \frac{2}{s^3}$$

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{2c}{s^3}.$$

**Примјер 2.2**

$$f(t) = e^{at} - e^{bt}, \quad a, b, = \text{const}$$

Рјешење

$$F(s) = \overset{01}{\frac{1}{s-a}} - \frac{1}{s-b} = \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}.$$

**Примјер 2.3**

$$f(t) = (1+at)e^{bt}, \quad a, b, = \text{const}$$

Рјешење

$$F(s) = \overset{01}{\ell\{e^{bt}\}} + a\overset{03}{\ell\{te^{bt}\}} = \frac{1}{s-b} + \frac{a}{(s-b)^2}.$$

**Примјер 2.4**

$$f(t) = \cos(at)$$

Рјешење

Познато је:

$$\frac{d(\sin at)}{dt} = a \cos at, \quad \text{одатле је директно } \cos at = \frac{1}{a} \frac{d(\sin at)}{dt}.$$

Сада је очигледно да вриједи:

$$\ell\{\cos at\} = \frac{1}{a} \ell\left\{\frac{d(\sin at)}{dt}\right\} \overset{04}{=} \frac{1}{a} s \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

**Примјер 2.5**

$$f(t) = \sin(3(t-2)) \cdot 1(t-2)$$

Рјешење

$$F(\sin 3t) = \frac{3}{s^2 + 3^2}$$

$$F(s) = \overset{02}{\frac{3}{s^2 + 9}} e^{-2s}.$$

**Примјер 2.6**

$$f(t) = e^{-at} \sin bt \quad a, b, = \text{const}$$

Рјешење

$$F(s) = \overset{03}{\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}}.$$

**Примјер 2.7**

$$f(t) = (t-1)^2 e^{t-1} \cdot 1(t-1)$$

*Рјешење*

Када би се занемарило кашњење функција би се свела на:

$$f(t) = t^2 e^t$$

Трансформација се може одредити (Об) као друга деривација трансформације функције  $e^t$ .

$$\ell\{t^2 e^t\} = \frac{d^2 \left( \frac{1}{s-1} \right)}{ds^2} = \frac{d \left( \frac{-1}{(s-1)^2} \right)}{ds} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\ell\{(t-1)^2 e^{t-1}\} = \frac{2}{(s-1)^3} e^{-s}$$

### Инверзна Лапласова трансформација

Већ је наведено да је за познату функцију  $F(s)$  коришћењем инверзне Лапласове трансформације могуће одредити оригинал према

$$\ell^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} F(s) ds.$$

Рачунање инверзије по овом изразу је веома компликовано па се иста одређује на други начин. Као основа се користе знања инверзне Лапласове трансформације елементарних функција, већ датих табелом Лапласове трансформације. Даље ћемо посматрати ликове који су облика количника полинома:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

гдје је  $n \geq m$  јер се у теорији система најчешће сусрећу оваке функције. Подсјетимо да су нуле полинома  $P(s)$  и  $Q(s)$  нуле и полови функције  $F(s)$ , респективно. За налажење инверзне Лапласове трансформације су од посебног интереса полови функције који представљају рјешења једначине:

$$Q(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Зависно од тих половина се разликује неколико случајева код одређивања инверзне Лапласове трансформације који су даље наведени.

*Сви полови су реални и једноставни (једноставни)*

У овом случају се  $F(s)$  може написати у облику:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)}$$

или у облику :

$$F(s) = \frac{K_1}{(s-s_1)} + \frac{K_2}{(s-s_2)} + \dots + \frac{K_n}{(s-s_n)}.$$

Коефицијенти  $K_i$  се лако одређују методом неодређених коефицијената. Након тога се инверзна Лапласова трансформација директно добија из таблице Лапласових трансформација.

*Постоје коњуговано комплексни полови*

Предпоставимо да поред реалних постоје и комплексни полови функције  $F(s)$ . У том случају  $F(s)$  се може представити у облику:

$$F(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + as + b} + \frac{K_3}{s-s_1} + \dots = F_1(s) + \frac{K_3}{s-s_1} + \dots$$

Одређивање инверзне Лапласове трансформације од  $F(s)$  је сада специфично само за компоненту  $F_1(s)$  која има пар коњуговано комплексних полова. Исту је потребно свести на облик

$$F_1(s) = \frac{K_1 s + K_2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Вриједности  $\alpha$  и  $\beta$  је лако одредити из  $2\alpha = a$ ;  $\alpha^2 + \beta^2 = b$ .

За познате  $\alpha$  и  $\beta$  се  $F_1(s)$  лако напише у облику:

$$F_1(s) = \frac{K_1(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{K_2 + \alpha K_1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Обе компоненте функције су сада у облику да се директно могу одредити њихови оригинали.

*Посйоје вишесйруки йолови*

Узмимо да  $F(s)$  има троструки реалан пол у  $s = s_1$  а да су остали полови једноструки. Тада се  $F(s)$  треба написати у облику:

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s - s_1)} + \frac{K_{12}}{(s - s_1)^2} + \frac{K_{13}}{(s - s_1)^3} + R(s),$$

гдје  $R(s)$  одговара компонентама које су последица свих преосталих полова. Очигледно се рачунање у овом случају своди на коректну примјену особине о деривацији комплексног лика јер је сваки члан који одговара троструком полу, облика деривације претходног.

## Одредити инверзну Лапласову трансформацију функција датих у наредним примјерима

### Примјер 2.8

$$F(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s}$$

*Рјешење*

Функција има два реална и проста пола  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -2$  па се може директно написати у облику

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 2}.$$

Поступком неодређених коефицијената се лако добије:

$$K_1 = \frac{1}{2}; \quad K_2 = \frac{1}{2}.$$

$$f(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s + 2)} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{1}(t) + \frac{1}{2} e^{-2t}.$$

### Примјер 2.9

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 - s^2 - 2s}$$

*Рјешење*

Полови функције су:  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = -1$ .

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s - 2} + \frac{K_3}{s + 1}$$

Вриједности кофицијената су:  $K_1 = -\frac{1}{2}$ ;  $K_2 = \frac{5}{6}$ ;  $K_3 = \frac{2}{3}$ .

$$f(t) = \ell^{-1} \left\{ -\frac{1}{2s} + \frac{5}{6(s-2)} + \frac{2}{3(s+1)} \right\} = -\frac{1}{2} \mathbf{1}(t) + \frac{5}{6} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}$$

### Примјер 2.10

$$F(s) = \frac{7}{s^2 + 10s + 41}$$

*Рјешење*

Полови функције су:  $s_1 = -5 + j4$ ,  $s_2 = -5 - j4$ .

Функцију треба трансформисати у облик  $F(s) = \frac{7}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$ .

Тада је:

$$2\alpha = 10, \alpha = 5;$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 41, \beta = 4.$$

$$F(s) = \frac{7}{4} \frac{4}{(s + 5)^2 + 4^2}$$

$$f(t) = \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t$$

### Примјер 2.11

$$F(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 2s + 10}$$

*Рјешење*

Полови функције су:  $s_1 = -1 + j3$ ,  $s_2 = -1 - j3$ .

Функцију треба трансформисати у облик  $F(s) = \frac{s + 5}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$ .

Тада је:

$$2\alpha = 2, \alpha = 1;$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 10, \beta = 3.$$

$$F(s) = \frac{s + 5}{(s + 1)^2 + 3^2} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 3^2} + \frac{4}{(s + 1)^2 + 3^2}$$

$$f(t) = e^{-t} \cos 3t + \frac{4}{3} e^{-t} \sin 3t$$

### Примјер 2.12

$$F(s) = \frac{a}{s(s + a)^2}$$

*Рјешење*

Полови функције су:  $s_1 = 0$ ,  $s_{2,3} = -a$ .

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{s+a} + \frac{K_{22}}{(s+a)^2}$$

$$K_1=1, K_{21}=-1, K_{22}=-a;$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} - \frac{a}{(s+a)^2}$$

$$f(t) = 1 - e^{-at} - ate^{-at}.$$

### Примјер 2.13

Нека је понашање система описано датом диференцијалном једначином. Дјеловање на систем је одређено функцијом  $x(t)$ , а излаз са  $y(t)$ . За нулте почетне услове одредити понашање система  $Y(s)$  за произвољно спољашње дјеловање. Затим одредити вриједност којој ће тежити излаз система ако је за вањско дјеловање познато само:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$ .

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t).$$

### *Рјешење*

Ако се примјени Лапласова трансформација, диференцијална једначина се трансформише у обичну алгебарску једначину:

$$T_1 T_2 [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + (T_1 + T_2) [sY(s) - y(0)] + Y(s) = kX(s)$$

па уз нулте почетне услове имамо

$$T_1 T_2 s^2 Y(s) + (T_1 + T_2) s Y(s) + Y(s) = kX(s)$$

$$Y(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1} X(s).$$

Из текста задатка и 08 Лапласове трансформације слиједи:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a = \lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$ , па је

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1} X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} skX(s) = ak$$

### Примјер 2.14

Наћи рјешење следеће диференцијалне једначине:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t), \text{ за нулте почетне услове и } u(t) = t, t > 0.$$

### *Рјешење*

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) [s^2 + 3s + 2] = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 (s^2 + 3s + 2)}$$

$$y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

### 3. МОДЕЛОВАЊЕ ДИНАМИЧКИХ ЕЛЕМЕНАТА И СИСТЕМА

#### 3.1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДИНАМИЧКИХ ЕЛЕМЕНАТА

У динамичким системима се анализира прерасподјела енергије, материја, информација у времену па је вријеме независна промјенљива. Промјене енергије и информација се испољавају кроз промјене одговарајућих величина у систему. Из тог разлога су од интереса везе између деривација промјенљивих зависних од времена. Ове зависности се могу изразити диференцијалним једначинама.

Моделовање динамичког елемента се своди на постављање диференцијалне једначине која описује његово понашање. Ако се ради о елементу са једним улазом и једним излазом тада одговарајућа диференцијална једначина треба да даје везу између деривација ове двије величине. Веза се може записати диференцијалном једначином вишег реда. Ово су модели типа улаз-излаз и један од облика је

$$l\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \dots, y(t), \frac{d^m u(t)}{dt^m}, \dots, u(t)\right) = 0$$

гдје је  $l$  нека нелинеарна функција више промјенљивих. Промјенљива  $u(t)$  је улаз елемента, а  $y(t)$  његов излаз. Када на елемент дјелује нека улазна величина, кажемо да се ради о неаутономном елементу, а описује се нехомогеном диференцијалном једначином. Ако диференцијална једначина одговара интеракцији у стварном елементу тада ће њено рјешење одговарати понашању моделованог елемента. Дакле, рјешавање диференцијалне једначине одговара анализи понашања моделованог динамичког елемента. Како не постоји опште рјешење за рјешавање разних типова диференцијалних једначина од посебног је значаја да се елементи (када год је то могуће) представе линеарним диференцијалним једначинама с константним коефицијентима.

Линеаризација модела датог задњом нелинеарном једначином се своди на то да лијеву страну ове једначине развијемо у Тајлор-ов ред у околини неког равнотежног стања  $(u_0, y_0)$ . Претпоставимо да се неко равнотежно стање система успоставља при датој константној вриједности улаза  $u(t)=u_0$  и да је излаз система у том стању једнак одређеној константној вриједности  $y(t)=y_0$ . Према томе, у равнотежном стању имамо да је

$$l(0, \dots, y_0, 0, \dots, u_0) = 0.$$

Нека су надаље од интереса промјене улаза  $\Delta(u(t))=u(t)-u_0$  и излаза  $\Delta(y(t))=y(t)-y_0$  у околини равнотежног стања  $(u_0, y_0)$ . На бази апроксимације првог реда за функцију  $l$ , која се добија изостављањем чланова вишег реда у Тајлоровом развоју, добија се линеарна диференцијална једначина у односу на наведене промјене улаза и излаза. Због једноставнијег записивања оваквих једначина најчешће се  $\Delta$  уз све промјенљиве изоставља, а увијек има у виду да се ради о промјенама (одступањима) ових промјенљивих у односу на њихове вриједности у датом равнотежном стању. Дакле, линеаризовани модел неког динамичког система је облика

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

гдје су коефицијенти  $a_k$  ( $k=0, \dots, n-1$ ),  $b_i$  ( $i=0, \dots, m$ ) одређени вриједностима парцијалних деривација функције  $l$  у равнотежној тачци према:

$$a_0 = \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)_0, a_1 = \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{y}}\right)_0, \dots, b_0 = \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)_0, b_1 = \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{u}}\right)_0, \dots$$

Из наведеног произилази да је први корак у анализи динамичког елемента формирање одговарајуће диференцијалне једначине која описује његово понашање. Ово се постиже примјеном основних закона физике. У циљу илустрације поступка наводи се добијање модела за неке карактеристичне случајеве.

### 3.2. ФУНКЦИЈА ПРЕНОСА

Послије примјене Лапласове трансформације на диференцијалну једначину улазно-излазног линеаризованог модела система  $n$ -тог реда добијамо

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s) + f(s, x_0)$$

гдје члан  $f(s, x_0)$  зависи од почетних услова. Када су почетни услови једнаки нули имамо

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

гдје је **функција преноса** система дата са

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

и при чему су  $A(s)$  и  $B(s)$  полиноми по комплексној промјенљивој  $s$ , респективно,

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$$

Функција преноса је од посебног значаја за анализу линеарних система, јер се за познато  $G(s)$

и  $U(s)$  директно може одредити  $Y(s)$ . Такође, ако се напише  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ , очигледно је да

функција преноса елемента представља количник Лапласових трансформација излаза и улаза елемента при нултим почетним условима.

### 3.3 СИСТЕМИ СА ВИШЕ УЛАЗА

У дијелу 3.1 је претпостављено да одзив на излазу  $y(t)$  неког система (елемента) зависи само од једног улаза  $u(t)$ . Након линеаризације модела било је могуће дефинисати његову функцију преноса у одјелку 3.2. Међутим, чешћи је случај да на излаз система утиче већи број вањских улаза (дјеловања). Напримјер, ако се ради о објекту управљања тада поред манипулативне промјенљиве постоје и разни поремећаји (Сл. 1. 11). Такође је типична ситуација да неки поремећаји имају значајан утицај на понашање система, а да се дјеловање осталих у овом погледу може занемарити. У циљу поједностављења даљих разматрања, претпоставићемо да на неки ОУ осим улаза  $u(t)$ , значајнији утицај на излаз  $y(t)$  има само још један поремећај  $d(t)$ . Тада се динамичко понашање оваквог система може описати са сљедећом нелинеарном диференцијалном једначином

$$l\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \dots, y(t), \frac{d^m u(t)}{dt^m}, \dots, u(t), \frac{d^k d(t)}{dt^k}, \dots, d(t)\right) = 0$$

Претпостављајући да се неко равнотежностанње овог система успоставља при датим константним вриједностима улаза  $u(t)=u_0$  и поремећаја  $d(t)=d_0$  за које се добија константна вриједност излаза  $y(t)=y_0$ , аналогно поступку изложеном у одјелку 3.1 добија се сљедећа диференцијална једначина линеаризованог модела

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t) + c_k \frac{d^k d(t)}{dt^k} + \dots + c_0 d(t)$$

Послије примјене Лапласове трансформације на последње једначину добија се

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s) + c_k s^k D(s) + \dots + c_0 D(s) + f(s, x_0)$$

гдје је  $D(s) = L(d(t))$  и гдје  $f(s, x_0)$  зависи од почетних услова. Ако се уведу ознаке

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$$

$$C(s) = c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \dots + c_0$$

из последње једначине имамо

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{C(s)}{A(s)}D(s) + \frac{f(s, x_0)}{A(s)}$$

Очигледно је да се на основу ове једначине могу дефинисати двије функције преноса које карактеришу утицај промјене улаза  $u(t)$  на излаз  $y(t)$  дат функцијом преноса

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

и такође, утицај промјене поремећаја  $d(t)$  на излаз  $y(t)$  који је дат функцијом преноса

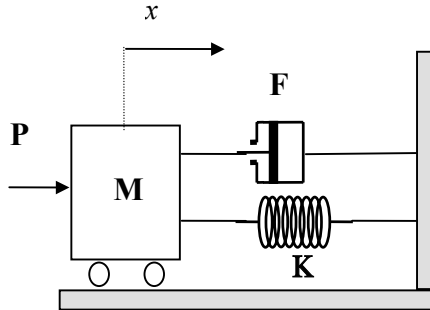
$$G_d(s) = \frac{C(s)}{A(s)}$$

Другим ријечима, функција преноса  $G(s)$  је дата односом Лапласове трансформације излаза  $y(t)$  и Лапласове трансформације улаза  $u(t)$  при нултим почетним условима (тада је  $f(s, x_0) = 0$ ) и када су промјене поремећаја  $d(t)$  једнаке нули ( $D(s) = 0$ ). С друге стране, функција преноса  $G_d(s)$  је дата односом  $Y(s)$  и  $U(s)$  при нултим почетним условима и уз претпоставку да су промјене улаза  $u(t)$  једнаке нули ( $U(s) = 0$ ).

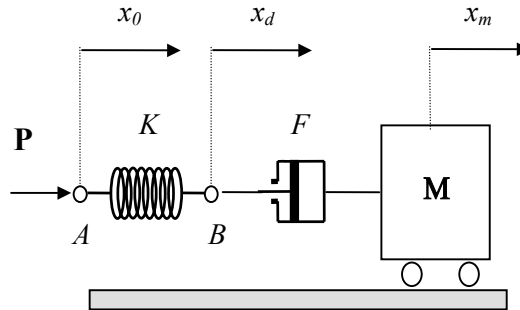
Захваљујући линеарности модела неког система (објекта управљања, елемента и сл.) који је дат линеарним диференцијалним једначинама или алгебарским једначинама када се користе функције преноса знатно је олакшана анализа таквих система. Напримјер, код одређивања одзива оваквих система може се користити **принцип суперпозиције**.

### Примјер 3.1

За механичке транслаторне системе на Сл. 3.1.а и 3.1.б формирати математичке моделе.



Сл. 3.1.а



Сл. 3.1.б

*Рјешење:*

Уочимо да у систему са Сл. 3.1.а сви елементи имају исте помаке и брзине. Њутнов закон о одржању количине кретања за наведени систем гласи:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = P - f_o - f_p$$

гдје је:

$x$ - положај тежишта тијела масе  $M$  у односу на референтни положај

$P$ - сила која дјелује на систем

$f_o$ - сила реакције опруге

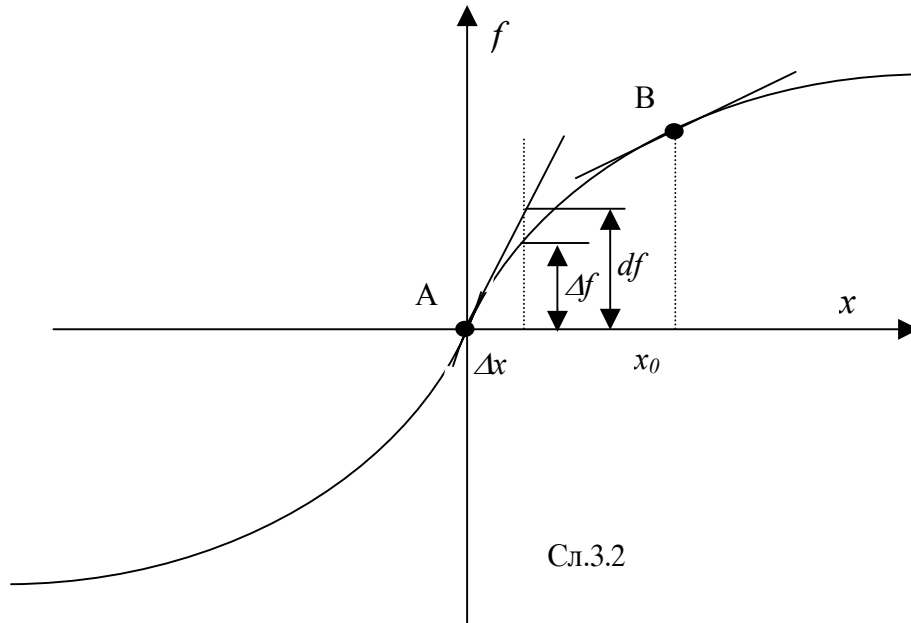
$f_p$ - сила реакције прогушивача.

Ако је пригушивач са коефицијентом вискозог трења  $F$  тада се може усвојити да приближно вриједи:

$$f_p = F \frac{dx}{dt}$$

(сила реакције пригушивача пропорционална је брзини кретања клипа).

Типична зависност силе реакције опруге  $f_p$  од помјераја  $x$  дата је нелинеарном статичком карактеристиком према Сл.3.2.



Сл.3.2

Функција  $f_o(x)$  је очигледно нелинеарна па би систем коректно био описан диференцијалном једначином

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = P - f_o(x) - F \frac{dx}{dt}$$

За познато  $P$  и почетне услове рјешење једначине ће дати зависно промјенљиву  $x$ . Дакле једначина моделира зависност положаја масе  $M$  у правцу  $x$  осе за познато вањско дјеловање представљено силом  $P$ , при познатим почетним условима. Основна потешкоћа је што се ради о нелинеарној диференцијалној једначини. Да би се она превела у одговарајућу линеарну потребно је карактеристику опруге замијенити линеарном (криву треба апроксимирати правцем). Са слике је очигледно да се тада мора узети у обзир номинални радни режим (радна тачка) и одступање од њега. За илустрацију су наведене двије такве тачке  $(A, B)$ . Понашање опруге у њима је различито, а квалитет апроксимације зависи и од могућих одступања од радне тачке. Узмимо да се радни режим одвија у околини тачке  $A$ . Тада се може усвојити да вриједи приближно:

$$f_0(x) = Kx, \quad K = \frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Уз задњу апроксимацију диференцијална једначина се своди на линеаран облик:

$$M \frac{dx^2}{dt^2} = P - Kx - F \frac{dx}{dt},$$

$$M \frac{dx^2}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + Kx = P,$$

За задато спољашње дјеловање  $P(t)$  и познате почетне услове, рјешење једначине показује приближно како ће се мијењати положај масе  $M$  у правцу  $x$  осе.

У случају система са сл. 3.1.б више не вриједи једнакост помака и брзина појединих елемената у систему, али вриједи једнакост сила које дјелују на поједине елементе у систему, и све су једнаке  $P$ . Сада можемо писати:

$$K(x_0 - x_d) = F(\dot{x}_d - \dot{x}_m), \quad (3.1)$$

$$F(\dot{x}_d - \dot{x}_m) = M\ddot{x}_m. \quad (3.2)$$

Након сређивања једначина (3.1) и (3.2) добијамо:

$$\frac{M}{K} \ddot{v}_m + \frac{M}{F} \dot{v}_m + v_m = v_0,$$

гдје  $v_m$  брзина масе  $M$ , а  $v_0$  брзина тачке  $A$ . Задња једначина математички описује зависност брзине тачке  $A$  и брзине масе  $M$ .

### Примјер 3.2

Формирати математички модел за процес слободног истјецања течности из резервоара, који је приказан на Сл. 1.5. Процесна величина од интереса је ниво течности у резервоару.

#### *Рјешење:*

На Сл. 3.5 са  $m_u(t)$  и  $m_i(t)$  су означени улазни и излазни масени токови, респективно. Површина попречног пресека резервоара је дата са  $A$ , док је са  $H$  ( $H=H(t)$ ) означен ниво течности у резервоару. Маса течности у резервоару је означена са  $M$ , а густина са  $\rho$ . Са  $A_i(t)$  је означена величина свијетлог пресека вентила.

Жељени математички модел ћемо добити постављањем једначине масеног биланса (једначина одржања масе), која гласи:

$$m_u(t) - m_i(t) = \frac{dM(t)}{dt} = A\rho \frac{dH(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Истјецање течности кроз вентил је дато једначином:

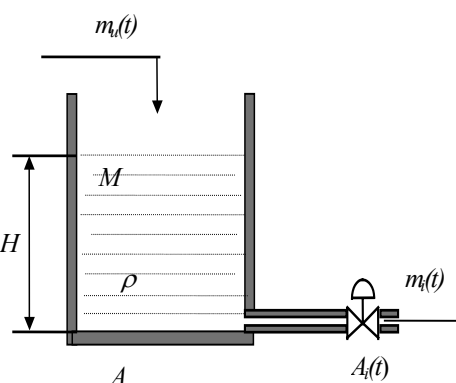
$$m_i(t) = K_v A_i(t) \rho \sqrt{2gH(t)}, \quad (3.4)$$

гдје је  $K_v$  константа коју за сваки вентил даје произвођач. Смјеном једначине (3.4) у једначину (3.3), добијамо:

$$m_u(t) = A\rho \frac{dH(t)}{dt} + K_v \rho A_i(t) \sqrt{2gH(t)}. \quad (3.5)$$

Једначина (3.5) представља тражени модел. Он је дат нелинеарном диференцијалном једначином. Нелинеарност се не огледа само у присуству члана  $(2gH)^{1/2}$ , већ и због производа  $A_i(2gH)^{1/2}$ . Стога, овдје ћемо провести поступак линеаризације модела датог једначином (3.5), и то методом тангентне линеаризације. Да бисмо објаснили суштину поступка послужићемо се Сл. 3.4. Тангентна линеаризација се, уствари, своди на развој функције у Тејлоров ред, у околини неке радне тачке (на Сл. 3.4 назначена са  $R$ ,  $(x_0, y_0)$ ), те задржавање само линеарних чланова у развоју, дакле:

$$y = y_0 + \frac{dy}{dx} \Big|_R (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_R (x - x_0)^2 + \dots,$$



Сл. 3.3

и након тога

$$y = y_0 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_R (x - x_0),$$

$$\Delta y = \left. \frac{dy}{dx} \right|_R \Delta x. \quad (3.6)$$

Битно је уочити да у релацији (3.6) (линеаризовани модел), уствари, имамо одступања појединих промјенљивих од њихових вриједности у стационарном режиму. Што су наведена одступања мања, то ће линеаризовани модел боље описивати реални систем. До наведеног резултата се могло доћи и узимањем диференцијала посматране функције  $y(x)$ :

$$dy = \left. \frac{dy}{dx} \right|_R dx,$$

те након тога, преласком са инфинитезималних прираста на коначне, што би резултирало релацијом (3.6).

Примјенимо сада добијене резултате на једначину (3.5). Одредићемо прво стационарно стање:

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

односно

$$m_{u0} = m_{i0} = K_v \rho A_{i0} \sqrt{2gH_0},$$

$$K_v = \frac{m_{i0}}{A_{i0} \rho \sqrt{2gH_0}}. \quad (3.7)$$

Даље имамо:

$$\dot{H} = f(H, m_u, A_i) = \frac{1}{A\rho} m_u - \frac{K_v A_i \sqrt{2gH}}{A}.$$

Тражене парцијалне деривације су дате са:

$$\left. \frac{\partial \dot{H}}{\partial H} \right|_0 = -\frac{m_{i0}}{2A\rho H_0} = -\frac{1}{RC}, \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{H}}{\partial A_i} \right|_0 = -\frac{m_{i0}}{A\rho A_{i0}} = -\frac{K_A}{C}, \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{H}}{\partial m_u} \right|_0 = \frac{1}{A\rho} = \frac{1}{C}. \quad (3.10)$$

У једначинама (3.8)-(3.10) константа  $R$  се назива коефицијент отпора, а дефинише се као прираст притиска/прираст протока.

Константа  $C$  се назива коефицијент капацитета, и карактерише могућност акумулирања масе у резервоару. Коефицијент капацитета дефинише се као прираст акумулиране масе/прираст притиска.

Линеаризовани модел сада има облик:

$$\Delta \dot{H} = -\frac{1}{RC} \Delta H - \frac{K_A}{C} \Delta A_i + \frac{1}{C} \Delta m_u, \quad (3.11)$$

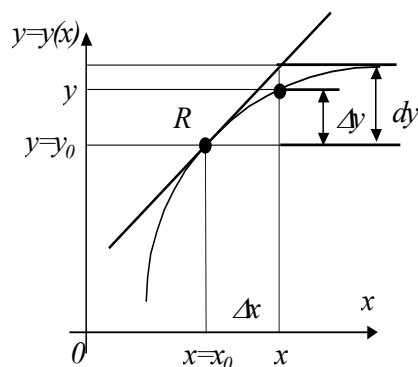
Преуређивањем једначине (3.11), те испуштањем ознаке  $\Delta$  (имамо у виду да се и даље ради о прирастима одговарајућих величина), добијамо:

$$T\dot{H} + H = -K_A R A_i + R m_u,$$

гдје је са

$$T = RC = \frac{2A\rho H_0}{m_{i0}} = 2 \frac{M_0}{m_{i0}} = 2T_0,$$

означена одговарајућа временска константа.



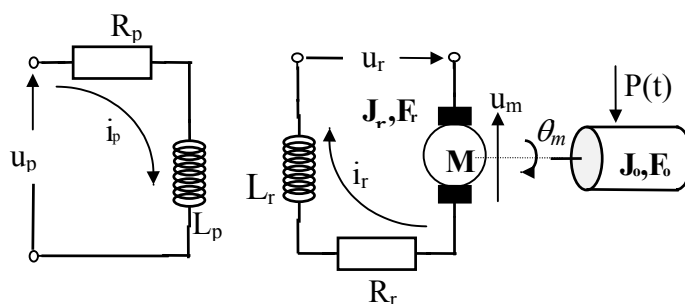
Сл. 3.4

**Примјер 3.3**

Формирати математички модел једносмјерног мотора, ако је управљан струјом у ротору.

**Рјешење:**

Мотори једносмјерне струје су често примјењивана врста актуатора код управљања процесима. Они врше конверзију електричне у механичку енергију. Шематски приказ једносмјерног мотора с оптерећењем дат је на Сл. 3.5. Назначени су побудно и коло ротора. Са  $R_p$  и  $L_p$  су назначени отпорност и индуктивност побудног намотаја, респективно. Аналогно су са  $R_r$  и  $L_r$  означени отпорност и индуктивност у колу ротора, респективно. Слично,  $J_m$  представља момент инерције ротора заједно са оптерећењем, а са  $F_m$  је означен коефицијент вискозног трења осовине ротора у његовим лежајевима. Са  $P(t)$  је означен промјенљиви момент оптерећења. Угаона брзина осовине ротора мотора означена је са  $\dot{\theta}_m$ .



Сл. 3.5

Овдје ћемо увести неке претпоставе, под којима се карактеристике мотора могу сматрати приближно линеарним:

1. Флукс у простору између статора и ротора, произведен струјом  $i_p(t)$  у статорском намотају, је линеарно сразмјеран струји  $i_p(t)$ ,

$$\Phi(t) = K_p i_p(t), \quad (3.12)$$

Иначе, карактеристика флукс-струја статора је нелинеарна карактеристика типа хистерезиса, или типа засићења,

2. Покретачки момент мотора је линеарно сразмјеран производу флукса струје  $i_p(t)$  и струје  $i_r(t)$ ,

$$M_m(t) = K_r(t)\Phi(t)i_r(t). \quad (3.13)$$

Смјеном једначине (1.66) у једначину (1.67), добијамо:

$$M_m(t) = K_r K_p i_p(t) i_r(t) = K_M i_p(t) i_r(t). \quad (3.14)$$

Електромоторна сила, на Сл. 3.5 означена са  $u_m$ , индукује се у ротору као посљедица обртања ротора, при чему вриједи:

$$u_m(t) = K\Phi(t)\dot{\theta}_m(t) = KK_p i_p(t)\dot{\theta}_m(t) = K_M i_p(t)\dot{\theta}_m(t). \quad (3.15)$$

Како су једначине (3.14) и (3.15) нелинеарне, линеаризоваћемо их усвајајући да је струја побудног намотаја константна.

$$M_m(t) = K_{em} i_r(t).$$

$$u_m(t) = K_{me} \dot{\theta}_m(t).$$

Напишимо сада диференцијалну једначину која изражава равнотежу напона у колу ротора.

$$L_r \frac{di_r(t)}{dt} + R_r i_r(t) + K_{me} \frac{d\theta_m}{dt} = u_r(t), \quad (3.16)$$

Такође, ако усвојимо апроксимацију за покретачки момент  $M_m(t)$ , једначину динамичке равнотеже момената на осовини мотора можемо написати у линеарном облику:

$$K_{em} i_r(t) = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + F_m \frac{d\theta_m}{dt} + P(t).$$

Задње двије једначине представљају линеарни динамички модел мотора управљаног струјом ротора.  
Напомена:

Пошто се ради о двије једначине оне се могу свести на једну у којој неће фигурирати струја ротора. Тада као улазне промјенљиве остају **напон ротора и момент оптерећења**, а излазна промјенљива угао **закрета осовине ротора**.