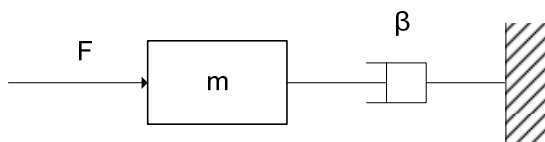


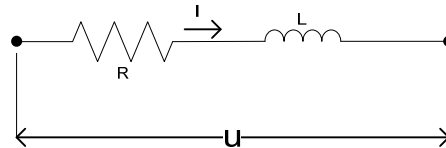
OPISIVANJE SAU DIFERENCIJALNIM JEDNAČINAMA

Zadatak 1.

Mehanički sistem dat je na slici 1. Dokazati da je električni sistem sa slike 2. analogan mehaničkom sistemu.



Slika 1.



Slika 2.

Rešenje:

Za sistem sa slike 1 važe sledeće oznake:

$m \cdot \ddot{x}$ - sila inercije,

β - koeficijent trenja,

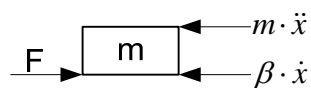
$\beta \cdot \dot{x}$ - sila trenja,

$\dot{x} = V$ - brzina,

$\ddot{x} = \dot{V}$ - ubrzanje.

F - sila kojom se djeluje na tijelo.

Uprošćena šema sila koje djeluju na tijelo, dat je na slici 3.



Slika 3.

Pošto mora biti zadovoljen uslov:

$$\sum F_x = 0, \quad [1]$$

dobija se:

$$F - m \cdot \ddot{x} - \beta \cdot \dot{x} = 0 \quad [2]$$

$$F = m \cdot \ddot{x} + \beta \cdot \dot{x} \text{ ili}$$

$$F = m \cdot \dot{V} + \beta \cdot V \quad [3]$$

Za električni sistem sa slike 2, važi:

$$R \cdot I + L \frac{dI}{dt} = u \quad [4]$$

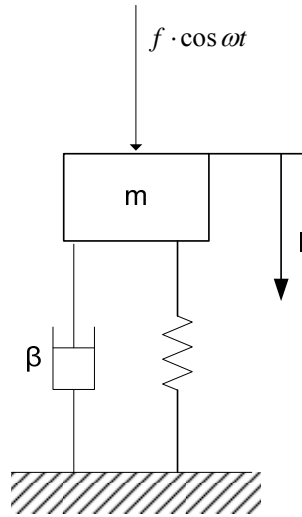
Ako zapišemo $\frac{dI}{dt} = \dot{I}$, dobija se:

$$R \cdot I + L \dot{I} = u \quad [5]$$

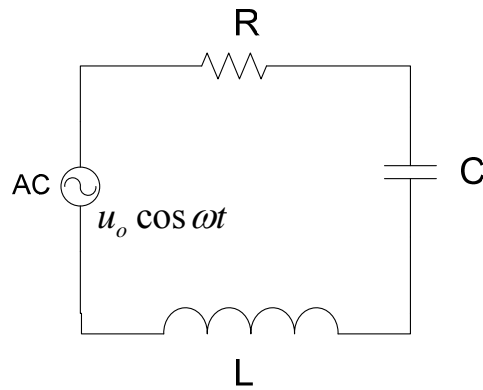
Upoređujući jednačine [3] i [5], zaključuje se da su ova dva sistema **analogna**.

Zadatak 2.

Mehanički sistem dat je na slici 1. Dokazati da je električni sistem sa slike 2. analogan datom mehaničkom sistemu.



Slika 1.



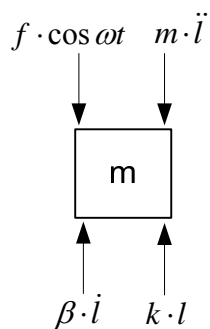
Slika 2.

Rešenje:

Za sistem sa slike 1 važe sledeće oznake:

- $m \cdot \ddot{l}$ - sila inercije,
- $k \cdot l$ - sila istežanja opruge,
- β - koeficijent trenja,
- $\beta \cdot \dot{l}$ - sila trenja,
- $f \cdot \cos \omega t$ - sila kojom se deluje na tijelo.

Uprošćena šema sila koje deluju na tijelo, dat je na slici 3.



Slika 3.

Pošto mora biti zadovoljen uslov:

$$\sum F_x = 0, \quad [1]$$

dobija se:

$$f \cdot \cos \omega t - m \cdot \ddot{l} - \beta \cdot \dot{l} - kl = 0 \quad [2]$$

$$f \cdot \cos \omega t = m \cdot \ddot{l} + \beta \cdot \dot{l} + kl \quad [3]$$

Za električni sistem sa slike 2, važi:

$$R \cdot I + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt = u_o \cos \omega t \quad [4]$$

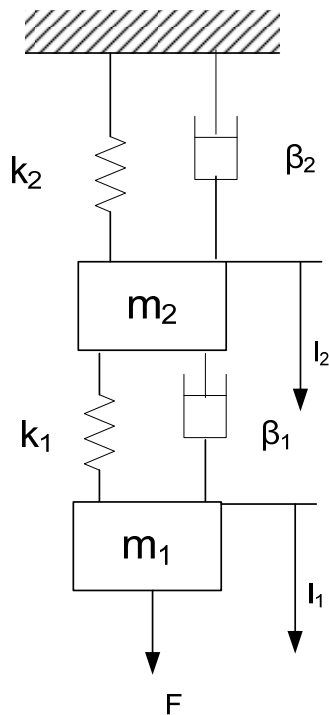
Poznato je da je $\frac{dq}{dt} = I$, pa ako uzmemo $\frac{dq}{dt} = \dot{q} = I$ i $\frac{dI}{dt} = \ddot{q} = \dot{I}$, dobije se:

$$R \cdot \dot{q} + L\ddot{q} + \frac{q}{C} = u_o \cos \omega t \quad [5]$$

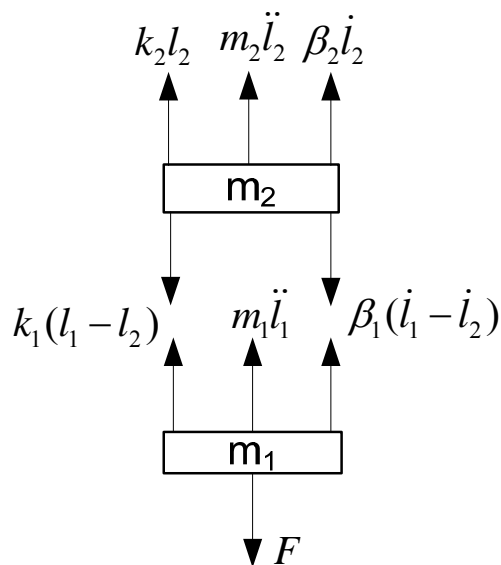
Upoređujući jednačine [3] i [5], zaključuje se da su ova dva sistema **analogna**.

Zadatak 3.

Opisati dati mehanički SAU sistemom diferencijalnih jednačina.



Slika 1.



Slika 2.

Rešenje:

Oznake na slici 1. su iste kao u prethodnim zadacima:

l_i - pređeni putevi pojedinih tijela,

$m_i \cdot \ddot{l}_i$ - sila inercije,

$k_i \cdot l_i$ - sila istezanja opruge,

β_i - koeficijent trenja,

$\beta_i \cdot \dot{l}_i$ - sila trenja,

F - sila kojom se djeluje na tijelo,

gdje je $i = 1, 2$.

Uprošćeni dijagrami djelovanja sila na pojedina tijela dati su na slici 2.

Diferencijalna jednačina koja važi za prvo tijelo je:

$$m_1 \ddot{l}_1 + \beta_1 (\dot{l}_1 - \dot{l}_2) + k_1 (l_1 - l_2) - F = 0$$

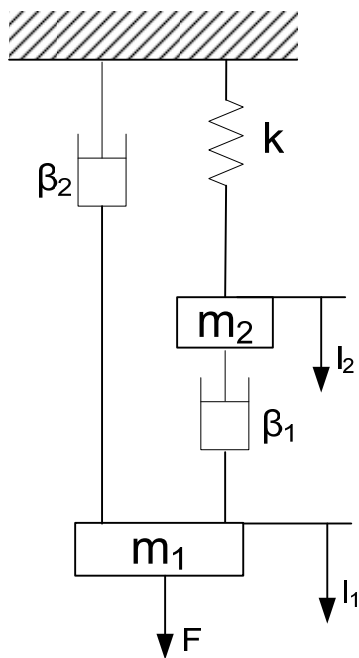
$$m_2 \ddot{l}_2 + \beta_2 \dot{l}_2 + k_2 l_2 - \beta_1 (\dot{l}_1 - \dot{l}_2) - k_1 (l_1 - l_2) = 0$$

a za drugo tijelo:

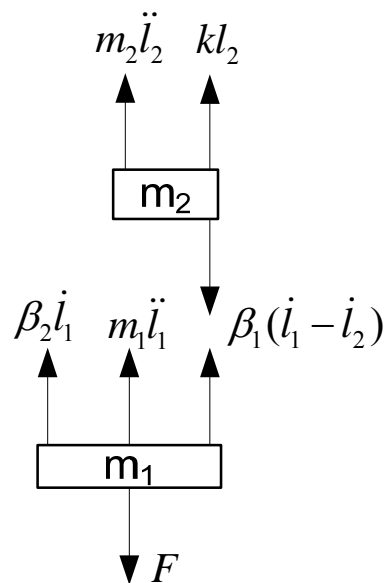
$$m_2 \ddot{l}_2 + \beta_2 \dot{l}_2 + k_2 l_2 - \beta_1 (\dot{l}_1 - \dot{l}_2) - k_1 (l_1 - l_2) = 0$$

Zadatak 4.

Opisati dati mehanički SAU sistemom diferencijalnih jednačina.



Slika 1.



Slika 2.

Rešenje:

Oznake na slici 1 i 2 su:

l_i - pređeni putevi pojedinih tijela,

$m_i \cdot \ddot{l}_i$ - sila inercije,

$k \cdot l_i$ - sila istezanja opruge,

β_i - koeficijent trenja,

$\beta_i \cdot \dot{l}_i$ - sila trenja,

F - sila kojom se djeluje na tijelo,

gdje je $i = 1, 2$.

Uprošćeni dijagrami djelovanja sila na pojedina tijela dati su na slici 2.

Diferencijalna jednačina koja važi za prvo tijelo je:

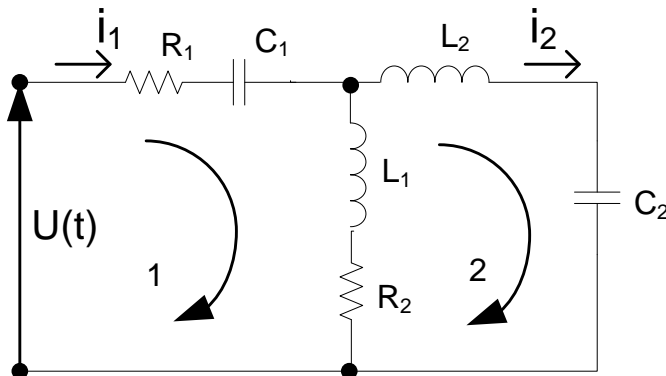
$$m_1 \ddot{l}_1 + \beta_2 \dot{l}_1 + \beta_1 (\dot{l}_1 - \dot{l}_2) = F$$

a za drugo tijelo važi:

$$m_2 \ddot{l}_2 + k l_2 - \beta_1 (\dot{l}_1 - \dot{l}_2) = 0$$

Zadatak 5.

Za dati električni sistem odrediti skup diferencijalnih jednačina koje ga opisuju.



Slika 1.

Rešenje:

Naponske jednačine za prvu i drugu konuru su:

$$1) R_1 \cdot i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + R_2 (i_1 - i_2) = u(t)$$

$$2) L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - R_2 (i_1 - i_2) - L_1 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} = 0$$

Pošto znamo da važi: $i = \frac{dq}{dt}$ slijedi:

$$1) R_1 \cdot \dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + L_1 (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + R_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = u(t)$$

$$2) L_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} - L_1 (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) - R_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0$$

Zadatak za vježbanje:

Za dati električni sistem odrediti skup diferencijalnih jednačina koje ga opisuju.

