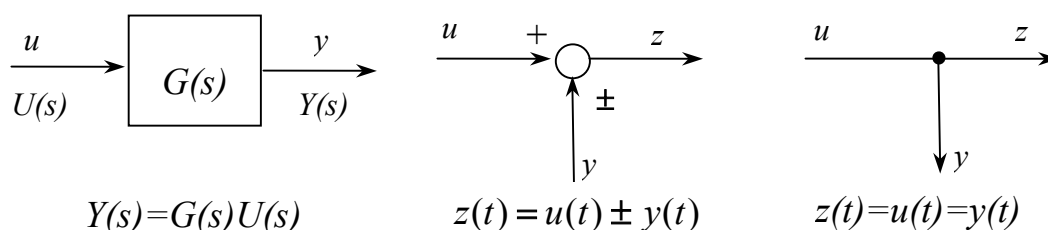


4. СТРУКТУРНИ БЛОК ДИЈАГРАМИ СИСТЕМА АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА

Један облик математичког модела система представља структурни блок дијаграм на коме су показане главне промјенљиве система, везе између тих промјенљивих и функције преноса компоненти система. Сваки елемент или група елемената се представљају једним блоком коме се придружује одговарајућа функција преноса. Линијама између блокова се приказују њихове међусобне интеракције. Стрелице на линијама означавају смијерове токова сигнала (информација) од једног елемента до другог. Кругови представљају суматоре - елементе који формирају разлику или збир двије или више промјенљивих. Користећи наведено представљање те знајући функцију преноса сваког динамичког елемента и везе са другим елементима се може представити комплетан динамички систем. Овако представљен систем може да формира релативно сложену структуру која садржи више локалних повратних спрега и већи број вањских дјеловања. Ма како била сложена почетна структура може се свести у конкретним случајевима неке основне структуре прикладне за конкретну употребу. Користећи основна правила алгебре функција преноса ове трансформације се могу једноставно реализовати.



Сл.4.1

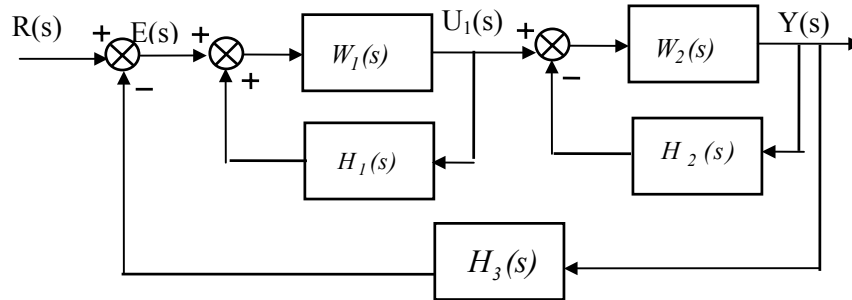
Правила алгебре функција преноса су једноставна и јасна сама по себи па ће само бити наведена у наредној табели без посебних доказа.

Табела 4.1 Основна правила алгебре функција преноса

Правило	Почетни дијаграм	Еквивалентни дијаграм	Једначина
Серијска веза			$y = G_1 G_2 u$
Паралелна веза			$y = (G_1 \pm G_2)u$
Помјерање тачке гранања испред блока			$y = Gu$
Помјерање тачке гранања иза блока			$y = Gu$
Помјерање суматора иза блока			$y = G(u \pm z)$
Помјерање суматора испред блока			$y = Gu \pm z$
Трансформација повратне спреге			$y = \frac{G}{1 \pm GH} u$
Помјерање тачке гранања испред суматора			$y = u \pm z$
Помјерање тачке гранања иза суматора			$y = u \pm z$
Комутација сигнала			$y = u \pm z_1 \pm z_2$

У следећим примјерима користећи основне трансформације блок дијаграма одредити функције преноса од улаза $R(s)$ до излаза $Y(s)$ за дате системе.

Примјер 4.1



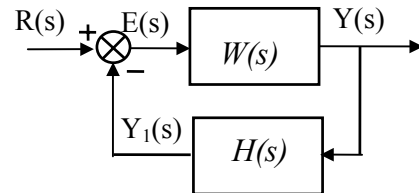
Сл.4.2.

Рјешење:

За систем са повратном спрегом дат блок дијаграмом на Сл.4.3. на основу дефиниције функције преноса вриједи релације

$$Y(s) = W(s) E(s) \quad (4.1)$$

$$Y_1(s) = H(s) Y(s) \quad (4.2)$$



Сл.4.3.

гдје је $W(s)$ - функција преноса директне гране, $H(s)$ - функција преноса кола повратне спреге. Блок означен кружићем представља дискриминатор. То је елемент којим се формира разлика (или збир-суматор) двију или више промјенљивих. Према томе је сигнал грешке одређен са:

$$E(s) = R(s) - Y_1(s) \quad (4.3)$$

Комбинујући (4.1), (4.2) и (4.3) добија се:

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)H(s)} R(s) \quad (4.4)$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)H(s)} R(s) \quad (4.5)$$

гдје је $W(s)H(s)$ - функција повратног преноса система. У случају да се ради о систему са позитивном повратном спрегом што је означено са знаком "+" на Сл.4.3. добија се:

$$E(s) = \frac{1}{1 - W(s)H(s)} R(s)$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)H(s)} R(s)$$

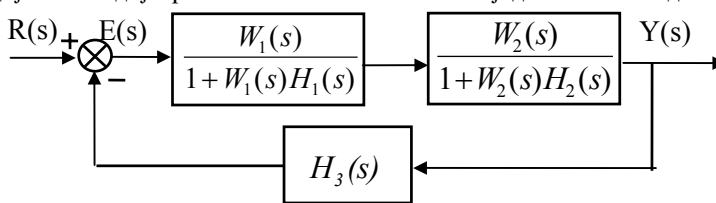
Дакле функција преноса система у затвореној спреси (сл.4.1.2.) је:

$$W_Z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)H(s)}$$

а функција преноса у односу на грешку $E(s)$ је:

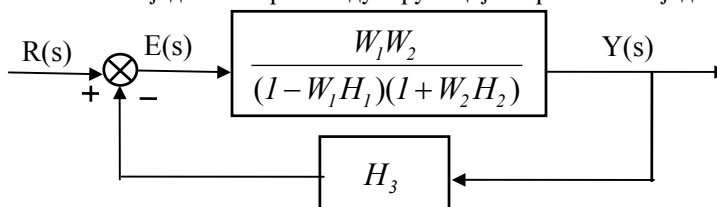
$$W_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + W(s)H(s)}$$

Користећи горе изведене релације блок дијаграм на Сл.4.2. се може поједноставити да се остварајуће локалне повратне спреге између промјенљивих $E(s)$ и $U_1(s)$ и такође између $U_1(s)$ и $Y(s)$ замијене блоковима са одговарајућим функцијама преноса као на сл.4.4.



Сл.4.4.

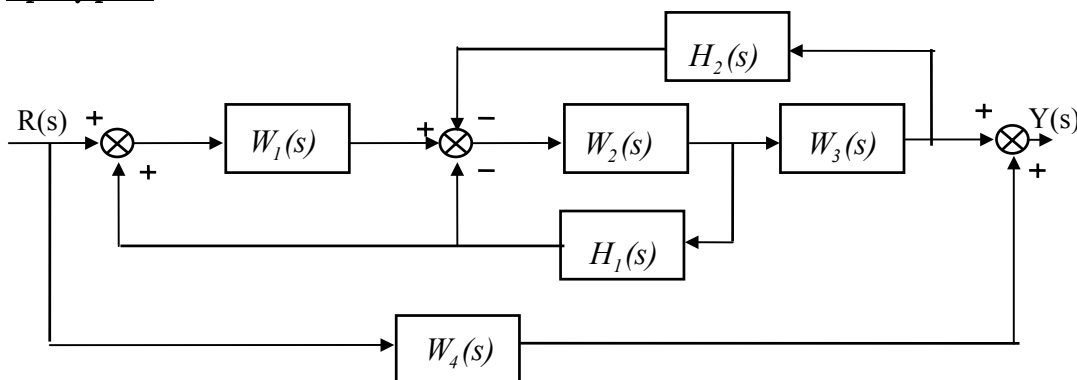
Како је функција преноса система којег чине више каскадно (серијски) везаних елемената једнака производу функција преноса појединих компоненти онда је функција преноса директне гране (кола) на Сл.4.4. као она на Сл.4.5. Ово значи да је блок - дијаграм на Сл.4.4. еквивалентан оном на Сл.4.5. На крају, користећи напријед изведено за функцију преноса система у затвореној спрези добијамо:



Сл.4.5.

$$W_z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{(1 - W_1(s)H_1(s))(1 + W_2(s)H_2(s)) + W_1(s)W_2(s)H_3(s)}$$

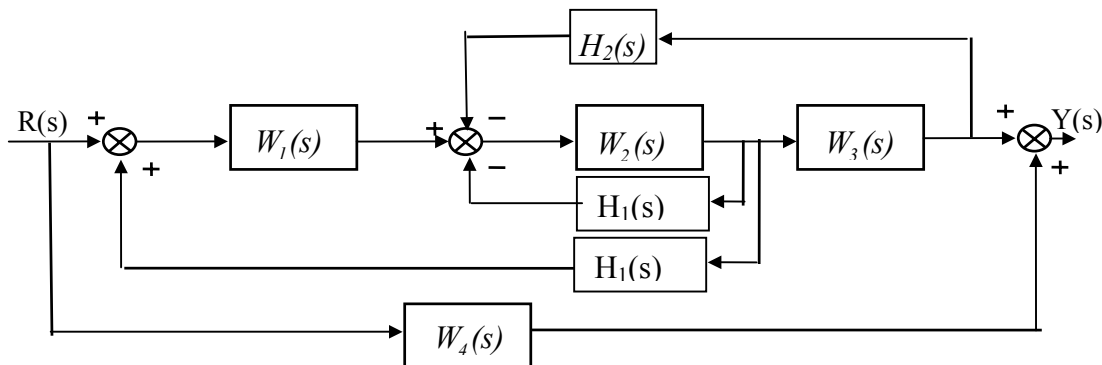
Примјер 4.2



Сл.4.6.

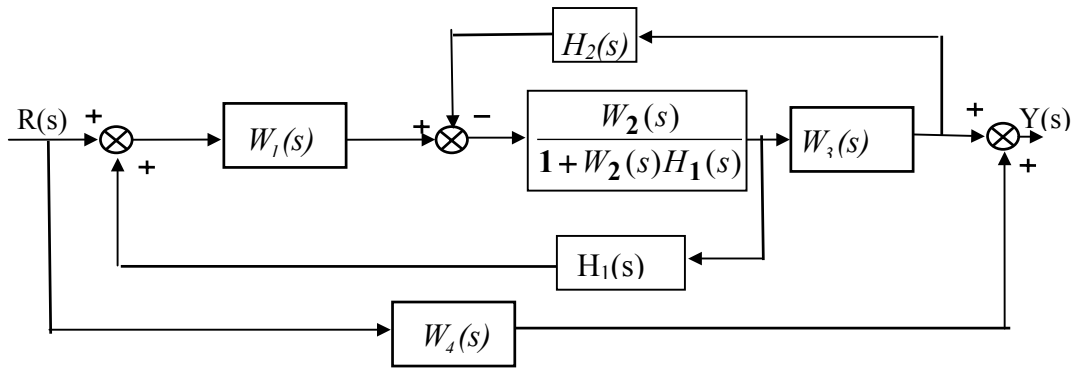
Рјешење:

Начин поједностављивања блок дијаграма није једнозначан. Овдје је изабран један начин којим се жели илустровати поступак трансформација блок дијаграма.

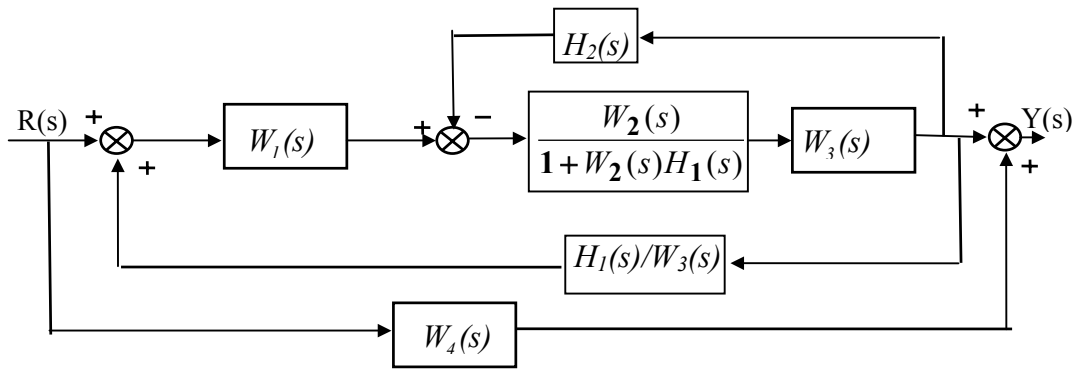


Сл.4.7

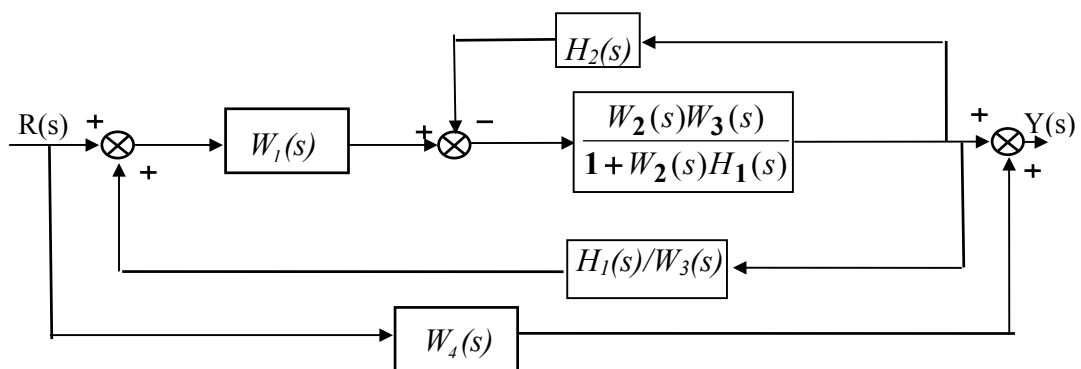
Трансформације на Сл.4.7-4.13. су приказане поступно, па није неопходно коментарисати сваки корак посебно.



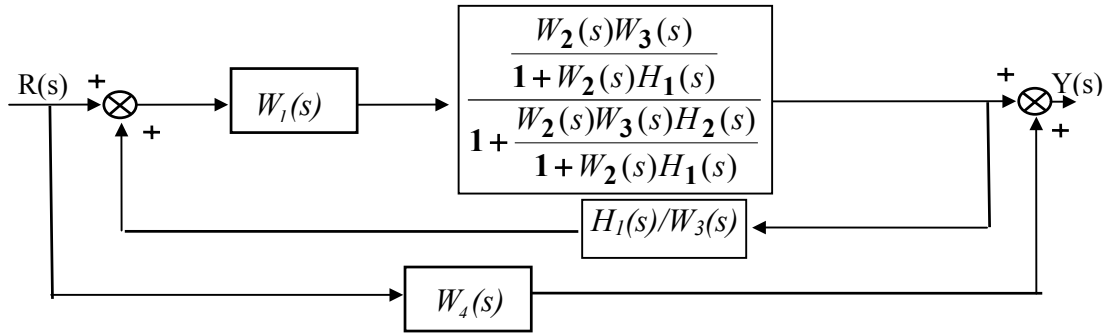
Сл.4.8



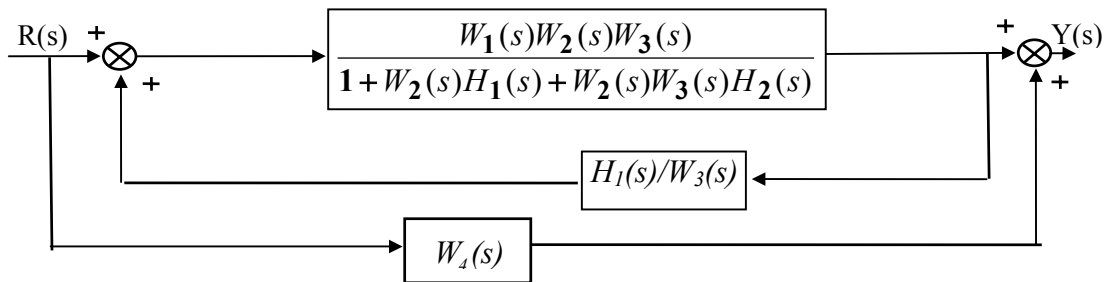
Сл.4.9



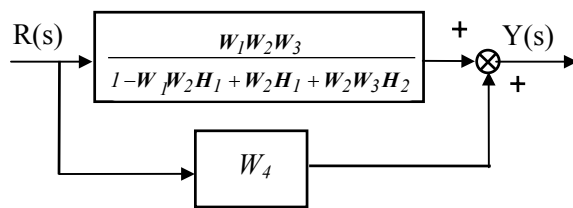
Сл.4.10



Сл.4.11



Сл.4.12



Сл.4.13

На основу Сл.4.13 је јасно да је функција преноса система одређена са :

$$W_z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = W_4(s) + \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)H_1(s) + W_2(s)H_1(s) + W_2(s)W_3(s)H_2(s)}$$

5. ФРЕКВЕНЦИЈСКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ

Као што је познато из Фуријеове анализе, сваки сигнал дефинисан на временском интервалу $[t_0, t_f]$ се може периодично продужити и представити линеарном комбинацијом синусних компоненти са фреквенцијама $0, \omega_{0f}, 2\omega_{0f}, 3\omega_{0f}, \dots$ гдје је $\omega_{0f} = 2\pi / (t_f - t_0)$ фундаментална кружна фреквенција. Код линеарних система је могуће комбиновати одзиве на поједине компоненте и на тај начин добити укупан одзив. Из овог разлога, претпоставимо да на улазу система са функцијом преноса $G(s)$ дјелује побуда облика

$$u(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), t \geq 0$$

гдје су A_1, ω, φ_1 амплитуда, кружна фреквенција и почетна фаза улаза. Лапласова трансформација овог улаза је дата са

$$U(s) = A_1 \frac{\omega \cos \varphi_1 + s \sin \varphi_1}{s^2 + \omega^2}$$

Комплексни лик излаза је одређен са

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Ако претпоставимо да је полином у имениоцу функције преноса $G(s)$ облика

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0,$$

и да су све нуле овог полинома једноструке (без губитка општости даљих извођења), могуће је десну страну израза за $Y(s)$ развити у парцијалне разломке

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{K_i}{s - s_i}$$

гдје су $s_{n+1} = j\omega, s_{n+2} = -j\omega$ нуле фактора $(s^2 + \omega^2)$, а коефицијенти K_i ($i=1, \dots, n+2$) су одређени према

$$K_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) Y(s), i = 1, \dots, n+2$$

Према томе, за коефицијент K_{n+1} се добија

$$K_{n+1} = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \frac{A_1 G(s) (\omega \cos \varphi_1 + s \sin \varphi_1)}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

односно

$$K_{n+1} = \frac{1}{2} A_1 G(j\omega) e^{j(\varphi_1 - \pi/2)}$$

Овдје је $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ па се може представити и у облику

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}$$

а коефицијент K_{n+1} као

$$K_{n+1} = \frac{1}{2} A_1 |G(j\omega)| e^{j(\arg G(j\omega) + \varphi_1 - \pi/2)}$$

За коефицијент K_{n+2} се добија коњуговано- комплексна вриједност од K_{n+1} ($G(s)$ је рационална функција комплексне промјенљиве s), то јест

$$K_{n+2} = \frac{1}{2} A_1 |G(j\omega)| e^{j(\arg G(-j\omega) - \varphi_1 + \pi/2)}$$

Уврштавањем овога у израз за комплексни лик излаза $Y(s)$ и користећи инверзну Лапласову трансформацију на крају добијамо израз за одзив система на хармонијску побуду у облику

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{s_i t} + K_{n+1} e^{j\omega t} + K_{n+2} e^{-j\omega t}, t \geq 0$$

Овај одзив се састоји од прелазних компоненти и компоненте стационарног стања. Ако су сви полови функције преноса $G(s)$ са негативним реалним дијелом (стабилни) тада добијамо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n K_i e^{s_i t} = 0$$

Отуда је у стационарном стању одзив дат са

$$y_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K_{n+1} e^{j\omega t} + K_{n+2} e^{-j\omega t}$$

Узимајући у обзир изразе за K_{n+1} и K_{n+2} имамо

$$y_s(t) = A_1 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega) + \varphi_1)$$

Дакле, у **стационарном стању се добија хармонијски одзив исте кружне фреквенције ω коју има улаз $u(t)$** на систем са функцијом преноса $G(s)$, амплитуде одређене са

$$A_2 = A_1 |G(j\omega)|$$

и почетне фазе

$$\varphi_2 = \arg(G(j\omega)) + \varphi_1$$

Потребно је нагласити да се овакав одзив у стационарном стању добија за систем који има све половине са положајем у лијевој половини комплексне s -равни.

За израчунавање излаза у стационарном стању довољно је познавати функцију

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}, (0 \leq \omega \leq \infty)$$

која се назива фреквенцијском функцијом система, а њезин дијаграм у комплексној $G(j\omega)$ – равни амплитудско-фазном карактеристиком система. Треба имати у виду да се ова карактеристика добија на основу познавања

$$A(\omega) = |G(j\omega)|, 0 \leq \omega < \infty$$

чији приказ представља **амплитудску** и

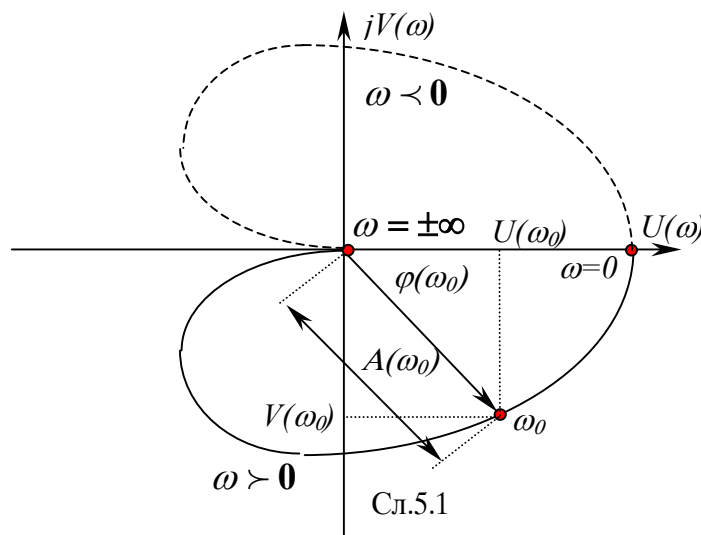
$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)), 0 \leq \omega < \infty$$

чији приказ представља **фазну** фреквенцијску карактеристику. За негативне вриједности кружне фреквенције ω амплитудно-фазни дијаграм је симетричан у односу на реалну осу (Сл.5.1).

Фреквенцијска карактеристика се такође може представити у облику:

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

За разлику од функција $A(\omega), \varphi(\omega)$ функције $U(\omega), V(\omega)$ немају јасан физички смисао и углавном се користе за лакше графичко представљање $G(j\omega)$.



5.1 БОДЕОВИ ДИЈАГРАМИ

Бодеои дијаграми се састоје од парова дијаграма. Један од ових дијаграма приказује зависност амплитудске, а други фазне карактеристике система од кружне фреквенције. Уобичајено се ове карактеристике приказују у функцији $\log \omega$, гдје је база логаритма 10. Ово омогућава приказивање зависности појачања (слабљења) и фазног помјераја система у широком опсегу фреквенција. Дакле, јединица на апсциси ових дијаграма је декада, која значи десетороструку разлику двију фреквенција, односно за било које ω_1 , за декаду већа фреквенција је $\omega_2 = 10\omega_1$, а за декаду мања је $\omega_3 = 0.1\omega_1$. Амплитудска логаритамска карактеристика се мјери децибелима [dB], то јест

$$L(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| [dB]$$

Ово има предности за врло велике и за врло мале вриједности $|G(j\omega)|$, када се користе одговарајуће апроксимације за $20 \log |G(j\omega)|$ и чињеница да се амплитудска логаритамска карактеристика каскадно повезаних система добија једноставним сумирањем тих карактеристика појединих дијелова. Фазна карактеристика се мјери у радијанима или степенима.

Софтверски пакети као што је *MATLAB* омогућавају израчунавање и цртање Бодеои дијаграма. Међутим, постоје једноставна правила која омогућавају брзо скицирање ових дијаграма. За ово је потребно да функција преноса буде дата у факторизованом облику, тј. као у сљедећем случају

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (\beta_i s + 1)}{s^k \prod_{i=1}^n (\alpha_i s + 1)}$$

Тада је

$$L(\omega) = 20 \log |K| - 20k \log |\omega| + \sum_{i=1}^m 20 \log |\beta_i j\omega + 1| - \sum_{i=1}^n 20 \log |\alpha_i j\omega + 1|$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arg(K) - k \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^m \arg(\beta_i j\omega + 1) - \sum_{i=1}^n \arg(\alpha_i j\omega + 1)$$

Дакле, Бодеои дијаграми се добијају једноставним сумирањем дијаграма за поједине факторе у функцији преноса. Осим тога, за поједине факторе се користе апроксимације које се изводе на бази сљедећих чињеница:

- За фактор K се добија амплитудски дијаграм који је хоризонтална линија на нивоу $20 \log |K| [dB]$, а за фазни хоризонтална линија на нивоу $-\pi [rad]$, $K < 0$, односно на $0 [rad]$, за $K > 0$.

Примјер 5.1

$$G(s) = K$$

Рјешење:

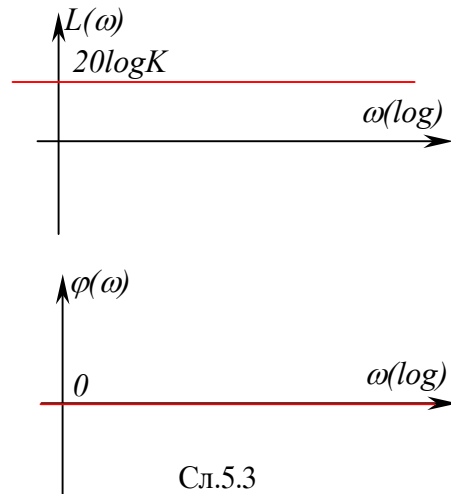
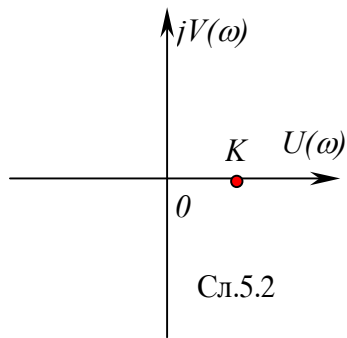
$$G(s) = K; \quad G(j\omega) = K;$$

$$U(\omega) = \operatorname{Re}(G(j\omega)) = K; \quad V(\omega) = \operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = K; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = 0$$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K$$

Амплитудно-фазна фреквенцијска карактеристика је дата на Сл.5.2 а логаритамске (амплитудска и фазна) на Сл.5.3.



- За фактор s^k амплитудски дијаграм је права линија са стрмином $20k [dB / dekad]$ и која пролази кроз апсцису ($0 [dB]$) на $\omega=1$, док је фазни помјерај једнак $k\pi/2 [rad]$.

Промјер 5.2

$k=-1$

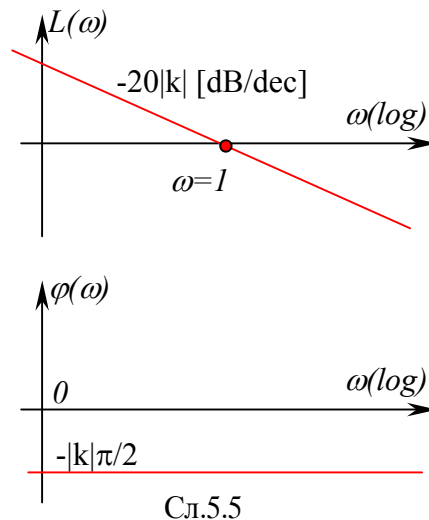
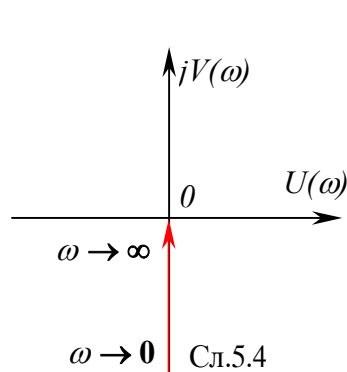
Рјешење:

$$G(s) = \frac{1}{s}; \quad G(j\omega) = -j \frac{1}{\omega};$$

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = -\frac{1}{\omega}; \quad A(\omega) = \frac{1}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20 \log 1 - 20 \log \omega$$

За $k < 0$ карактеристике изгледају као на Сл.5.4 и Сл.5.5.



Примјер 5.3

$k=1$

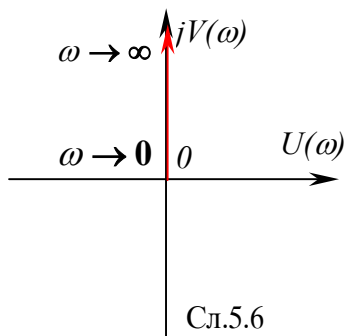
Рјешење:

$$G(s) = s; \quad G(j\omega) = j\omega;$$

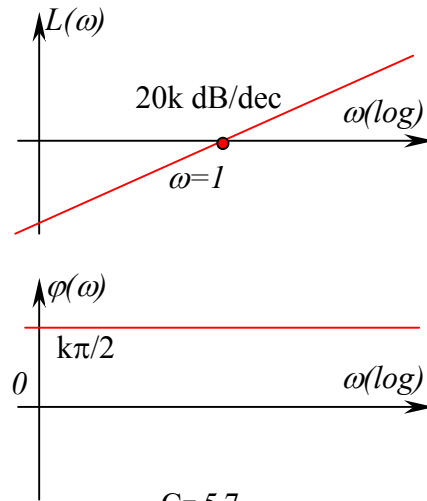
$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = \omega; \quad A(\omega) = \omega; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20 \log 1 + 20 \log \omega$$

За $k > 0$ на Сл.5.6 и Сл.5.7. су представљени дијаграми ових карактеристика.



Сл.5.6



Сл.5.7

- Фактору $(Ts+1)^k$, ($T \in R$) одговара амплитудски Бодев дијаграм који се може апроксимирати на следећи начин:
 - У опсегу фреквенција у коме је $|T\omega| \ll 1$; $20 \log|Tj\omega + 1| \approx 20 \log(1) = 0[dB]$, то јест за ниске фреквенције (НФ), ово је хоризонтална линија коју можемо назвати НФ асимптота.
 - Када је $|T\omega| \gg 1$; $k20 \log|Tj\omega + 1| \approx k20 \log(|T\omega|)[dB]$, то јест за високе фреквенције (ВФ), ово је права линија са стрмином $k20[dB / dekad]$ која пресеца апсцису ($0[dB]$), на $\omega = 1/|T|$ и коју можемо назвати ВФ асимптота.
 - Када је у фактору $(as+1)$, $a = a_1 + j a_2$, тада фазни дијаграм одговара углу комплексног броја са реалним дијелом $(1 - \omega a_2)$, а имагинарним дијелом једнаким ωa_1 .

Напомена: Када је функција преноса облика односа два полинома по комплексној промјенљивој s чији су коефицијенти реални, тада ако у $G(s)$ постоји фактор $(as+1)$, $a = a_1 + j a_2$, тада постоји и фактор $((a_1 - j a_2)s + 1)$. Дакле, ако се ради о факторима који одговарају коњуговано-комплексним нулама, тада Бодев амплитудски дијаграм за овај пар фактора има ВФ асимптоту са стрмином $k40 \log(|a\omega|)[dB]$, односно $-|k| 40 \log(|a\omega|)[dB]$ за случај коњуговано-комплексних полова функције преноса.

Највећа одступања асимптотских од тачних дијаграма се појављују на такозваним преломним фреквенцијама гдје се уствари пресецају асимптоте амплитудских Бодевих дијаграма. Ако се захтијевају тачније вриједности фреквенцијских карактеристика за фреквенције у околини преломних, тада се може извршити израчунавање тих карактеристика за поједине чланове из израза за $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ који највише доприносе тим разликама и у складу с тим направити одговарајуће корекције. Друга могућност је да се користе дати изрази за тачно израчунавање дијаграма за поједине фреквенције.

Примјер 5.4

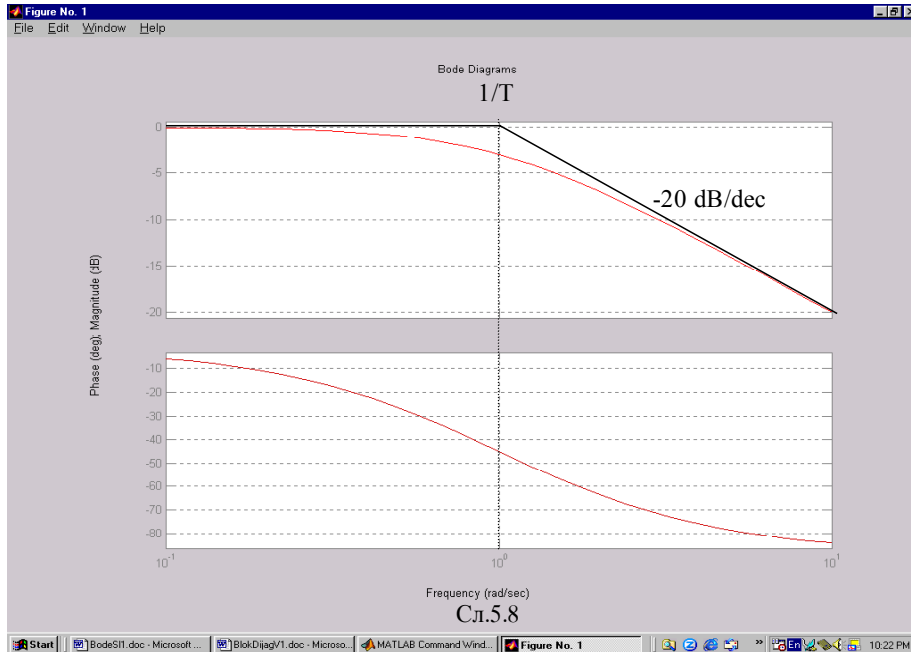
$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Рјешење:

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1};$$

$$U(\omega) = \frac{1}{(T\omega)^2 + 1}; \quad V(\omega) = \frac{-T\omega}{(T\omega)^2 + 1}; \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega$$

$L(\omega) = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$
 Бодеои дијаграми су дати на Сл.5.8.



Примјер 5.5

$$G(s) = Ts + 1$$

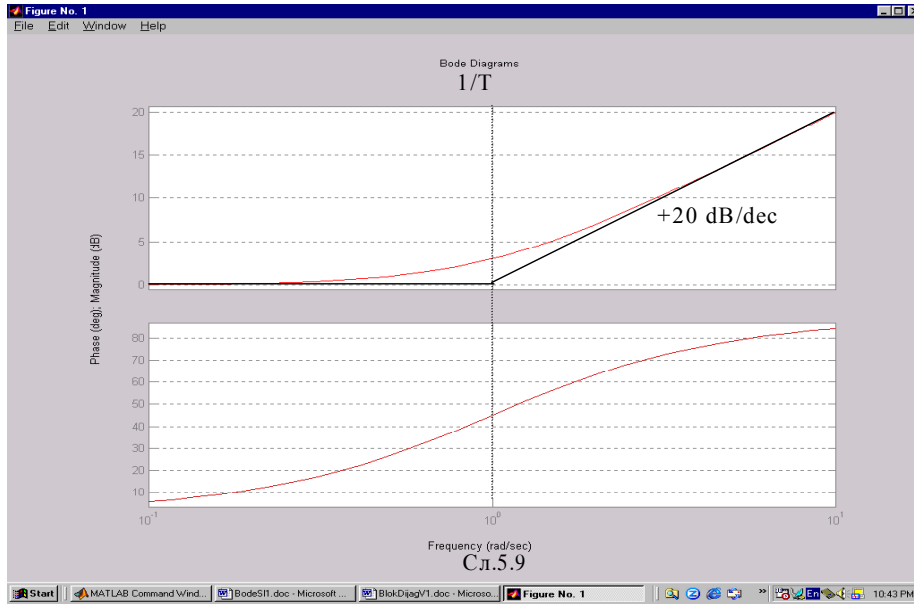
Рјешење:

$$G(s) = Ts + 1; \quad G(j\omega) = jT\omega + 1;$$

$$U(\omega) = 1; \quad V(\omega) = T\omega; \quad A(\omega) = \sqrt{(T\omega)^2 + 1}; \quad \varphi(\omega) = \arctg T\omega$$

$$L(\omega) = 20 \log 1 + 20 \log \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

Бодеои дијаграми су дати на Сл.5.9.



Примјер 5.6

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Рјешење:

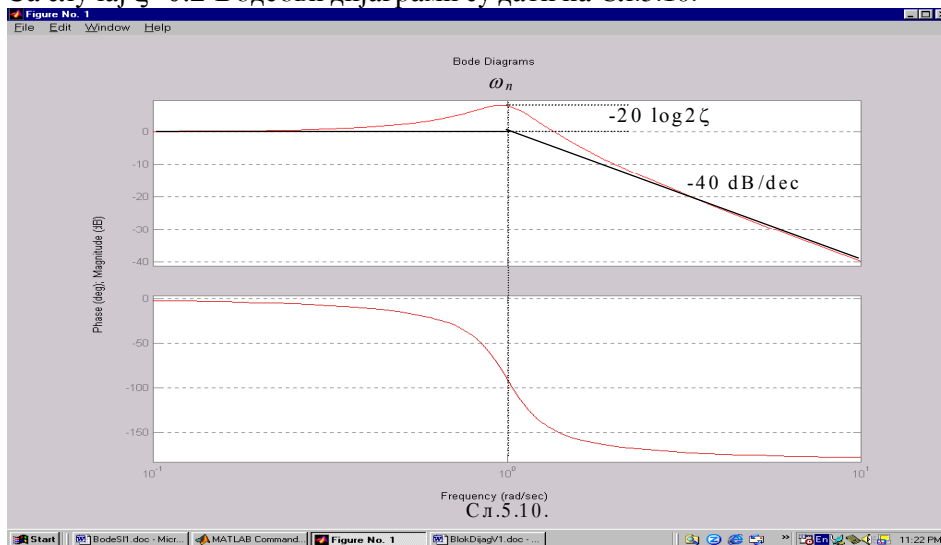
$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega};$$

$$U(\omega) = \frac{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}; \quad V(\omega) = \frac{-2\zeta\omega_n^3\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2};$$

$$A(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$L(\omega) = 20 \log \omega_n^2 - 20 \log \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

За случај $\zeta=0.2$ Бодови дијаграми су дати на Сл.5.10.



Напомена: Термин неминимално фазни се користи за такве системе који имају нуле (и/или полове) у десној s -полуравни. Ово је једноставно илустровати на примјеру система првог реда датих функцијама преноса

$$G_1(s) = \frac{s + a_0}{s + \alpha}$$

и

$$G_2(s) = \frac{s - a_0}{s + \alpha}, a_0 > 0, \alpha > 0$$

Оба система имају једнаке амплитудске фреквенцијске карактеристике

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$

али су им фазне карактеристике разликују и одређене су према

$$\arg G_1(j\omega) = \arctg(\omega/a_0) - \arctg(\omega/\alpha)$$

и

$$\arg G_2(j\omega) = \pi - \arctg(\omega/a_0) - \arctg(\omega/\alpha)$$

Дакле, за исту вриједност кружне фреквенције ω у другом систему ($G_2(s)$) се добија по апсолутној вриједности већа фазна карактеристика него за први систем са функцијом преноса $G_1(s)$. Отуда произилази овај термин неминимално фазни за све системе који имају нуле и полове у десној половини s - равни.

5.2 ФИЛТРИРАЊЕ

За један идеални појачавач, фреквенцијска карактеристика је дата са $G(j\omega) = K, \forall \omega$, то јест свака фреквенцијска компонента пролази кроз систем са константним појачањем и без фазног помјераја. Међутим, сви физички системи и уређаји имају коначну брзину са којом могу реаговати на неку побуду, па отуда слиједи да $G(j\omega) = K, \forall \omega$, не може бити фреквенцијска функција за реалне системе. Другим ријечима, реални систем различито филтрира (пропушта) улазе са различитим фреквенцијама. У том смислу је уобичајено да се разликују три опсега фреквенција:

- *Пројусни ојсеџ*, у којем се све фреквенцијске компоненте пропуштају са приближно истим појачањем (слабљењем) и са фазним помјерајем који је апроксимативно пропорционалан кружној фреквенцији дате компоненте;
- *Нејројусни ојсеџ*, у којем се све фреквенцијске компоненте не пропуштају, то јест у коме је $|G(j\omega)|$ занемарљиво мале вриједности у односу на фреквенцијску амплитудску карактеристику из пропусног опсега;
- *Прелазни ојсези*, који су између претходно дефинисаних опсега.

Треба примијетити да један систем може имати више пропусних и непропусних опсега. Ове дефиниције се традиционално користе у филтрима као: филтар пропусник ниских фреквенција (НФ), пропусник опсега, непропусник опсега, пропусник високих фреквенција (ВФ). У том смислу се дефинишу величине:

- Гранична фреквенција ω_{gr} за коју је $|G(j\omega_{gr})| = \widehat{G} / \sqrt{2}$ гдје се

\widehat{G} дефинише са:

- $|G(0)|$ за НФ и непропуснике опсега;
- $|G(\infty)|$ за ВФ филтре;

- максимална вриједност од $|G(j\omega)|$ у пропусном опсегу, за пропуснике опсега.

○ Пропусни опсег B_w , је мјера ширине опсега фреквенција.

Систем који има константну вриједност амплитудске карактеристике за све фреквенције се назива све-пропусни филтар. Као типичан примјер овога је систем чистог временског кашњења. Стабилан систем са рационалном функцијом преноса у облику

$$G_{sp}(s) = K_{sp} \frac{p(-s)}{p(s)}$$

је примјер наведеног филтра

Изобличења и квалитет репродукције

Када систем има неидеалну фреквенцијску карактеристику кажемо да исти уноси изобличења. Да би се описала различита изобличења која сусрећемо у пракси, посматрајмо сигнал $f(t)$ дат са

$$f(t) = \sum_{i=1}^{nf} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Рецимо да је овакав облик улазног дјеловања на неки систем. Кажемо да систем квалитетно репродукује овај сигнал ако се амплитуде свих компоненте појачавају (слабе) приближно за исти фактор и ако су све компоненте закашњене за исто вријеме. Ово захтијева да буду задовољени услови:

$$|G(j\omega_i)| = G_0, i = 1, \dots, nf$$

$$\arg(G(j\omega_i)) = -k_0 \omega_i, i = 1, \dots, nf$$

У овом случају облик сигнала на излазу ће бити као и оног на улазу само закашњен за k_0 . Када један од услова није испуњен, облик излаза се разликује од облика $f(t)$, и кажемо да систем уноси изобличења. Могу постојати амплитудска, фазна или једна и друга изобличења, већ према томе који од напријед наведених услова нису испуњени.

Према претходним дефиницијама имаћемо занемарљива изобличена ако су све фреквенције компоненти сигнала $f(t)$ ”добро” унутар пропусног опсега система. Треба примјетити да систем са чистим временским кашњењем не уноси изобличења, док све пропусни филтар уноси само фазна изобличења, која су занемарљива на НФ.

У примјерима 5.7-5.9 нацртати амплитудно-фазне фреквенцијске карактеристике динамичких елемената датих функцијама преноса.

Примјер 5.7

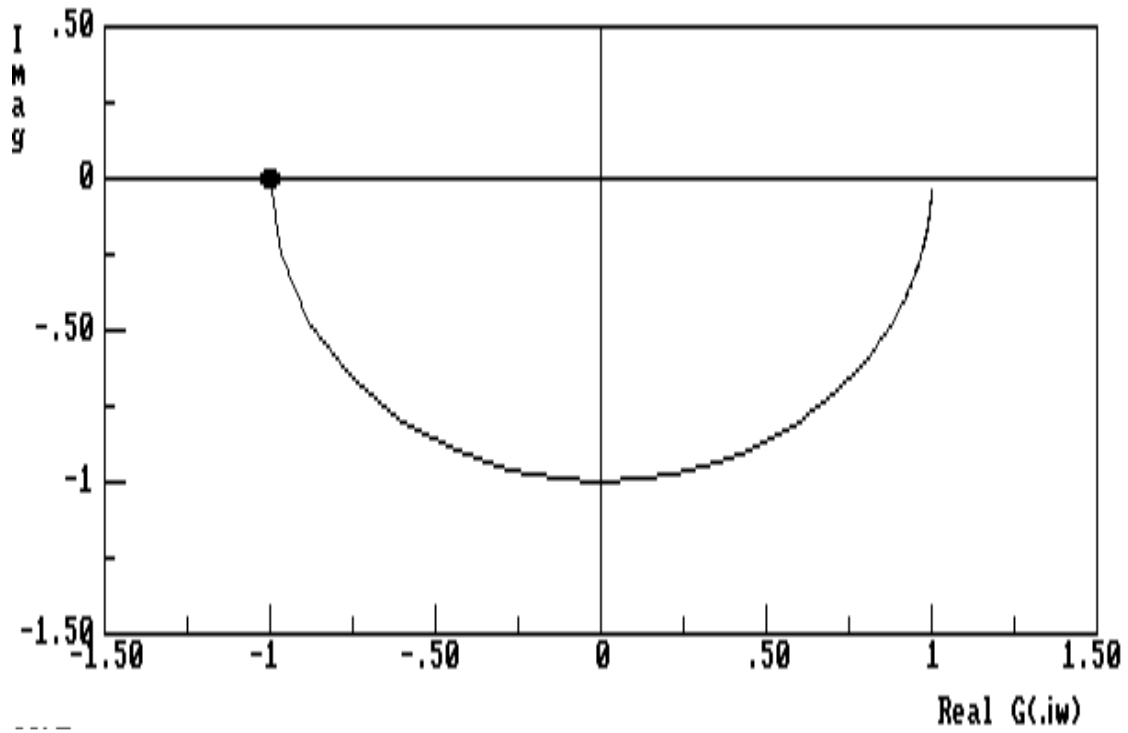
$$G(s) = \frac{Ts + 1}{Ts - 1}$$

Рјешење:

$$\text{За } s = j\omega \text{ је } G(j\omega) = \operatorname{Re}G(j\omega) + j\operatorname{Im}G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\arg G(j\omega)},$$

$$\arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}G(j\omega)}{\operatorname{Re}G(j\omega)}$$

$$G(j\omega) = \frac{Tj\omega + 1}{Tj\omega - 1} \cdot \frac{-1 - Tj\omega}{-1 - Tj\omega} = \frac{-1 - j2T\omega + T^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} = \frac{-1 + T^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} - \frac{j2T\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

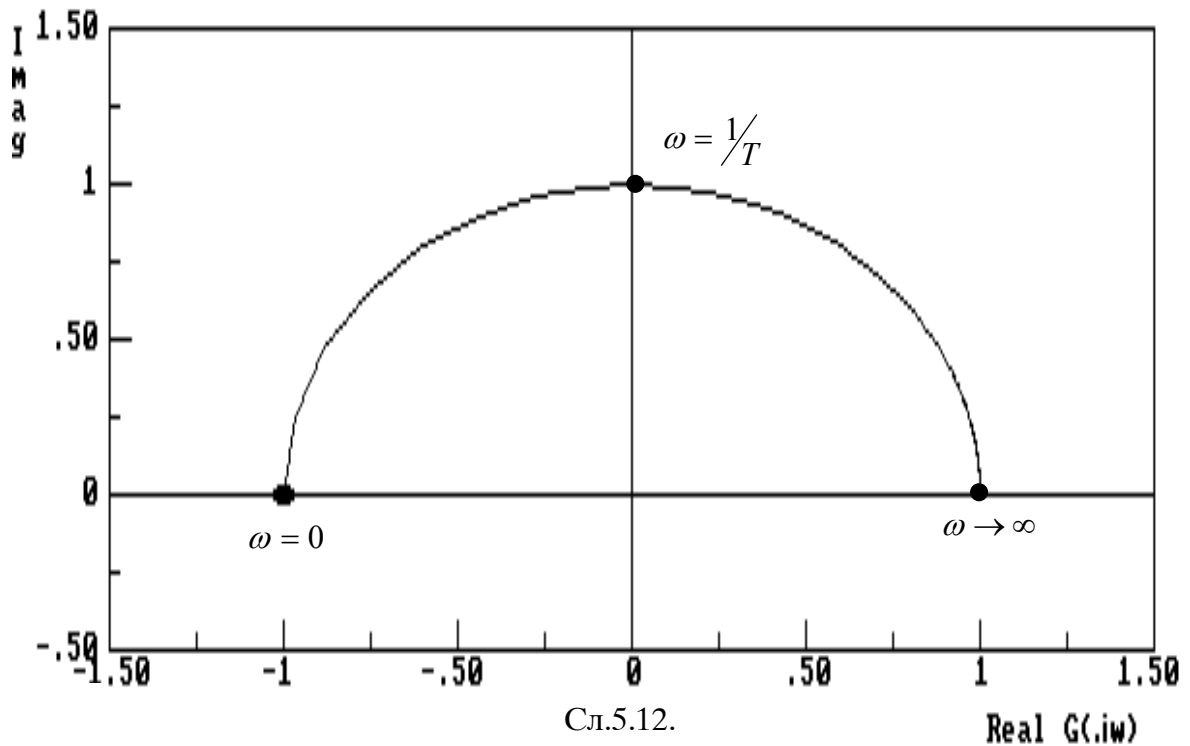


$$G(j\omega) = \sqrt{\frac{(1+T^2\omega^2)^2}{(1+T^2\omega^2)^2}} \frac{e^{j\arctg T\omega}}{e^{j(\pi-\arctg T\omega)}} = e^{j(-\pi+2\arctg T\omega)}$$

Примјер 5.8

$$G(s) = \frac{Ts - 1}{Ts + 1}$$

Рјешење:



Сл.5.12.

Примјер 5.9

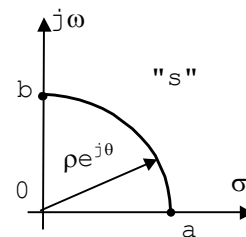
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Рјешење:

Функција преноса има један пол у координатном почетку.

$$ab: s = \rho e^{j\theta}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho e^{j\theta}} \rightarrow \infty e^{-j\theta}$$



Сл.5.13

За $s = j\omega$, $0 < \omega < \infty$ имамо

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} K \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2} = \infty e^{-j\pi/2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\omega^3} e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 0 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}}$$

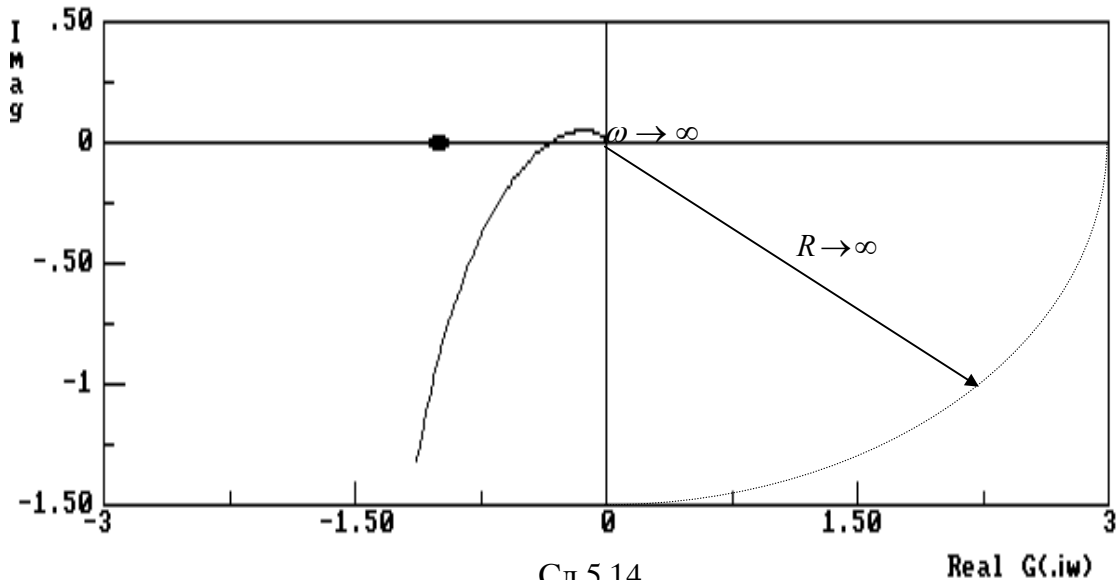
$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{-j\omega(-j\omega T_1 + 1)(-j\omega T_2 + 1)}{\omega^2(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)} = \frac{-(T_1 + T_2)}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)} - j \frac{1 - \omega^2 T_1 T_2}{\omega(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = K[-(T_1 + T_2) - j\infty]$$

$$\operatorname{Im}G(j\omega) = 0, \text{ при } \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$$

За $\omega \in]-\infty, 0]$ добије се коњуговано комплексна вриједност од $G(j\omega)$ при чему је

$\omega \in [0^+, +\infty[$ па је тај дио криве симетричан у односу на реалну осу.



Сл.5.14

Примјер 5.10

Нацртати амлитудно-фазну фреквенцијску карактеристику летјелице чија је функција преноса

$$G(s) = \frac{k_s^v (T_0 s + 1)}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}$$

гдје параметри летјелице послје 90 секунди лета, имају следеће вриједности:

$$k_s^v = 4.0 \text{ s}^{-1}, \quad T_0 = 3.4 \text{ s}, \quad T = 0.23 \text{ s}, \quad \xi = 0.06.$$

~~Рјешавање:~~

За $s = j\omega$ имамо

$$G(j\omega) = \frac{k_s^v (T_0 j\omega + 1)(-j)(1 - T^2 \omega^2 - j2\xi T \omega)}{\omega[(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2]}$$

$$G(j\omega) = k_s^v \frac{T_0 \omega(1 - T^2 \omega^2) - 2\xi T \omega - j(1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T_0 T \omega^2)}{T^4 \omega^5 + (4\xi^2 T^2 - 2T^2) \omega^3 + \omega}$$

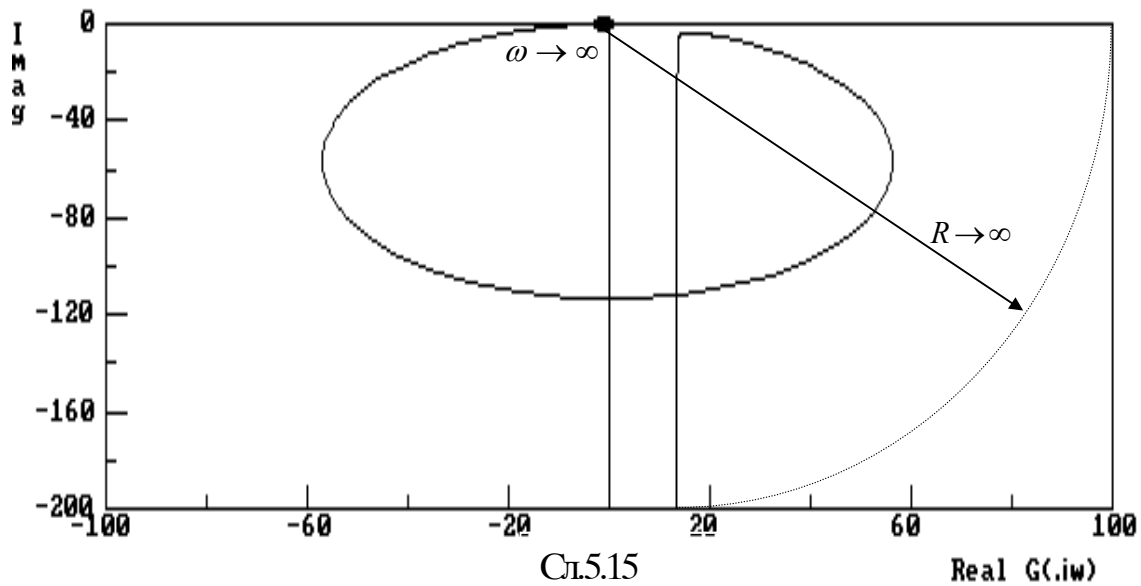
$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = \frac{-0.1802 \omega^3 + 3.372 \omega}{0.0028 \omega^5 - 0.1052 \omega^3 + \omega}$$

$$V(\omega) = \frac{-3.128 \omega^2 - 1}{0.0028 \omega^5 - 0.1052 \omega^3 + \omega}$$

Табела 5.1.

ω	0.1	0.5	1.0	2.0	4.0	4.5	5.0	10	20	50	∞
$U(\omega)$	3.37	3.42	3.56	1.23	15.2	15.1	-11.3	-0.8	-0.17	-0.03	0
$V(\omega)$	-10.3	-3.66	-4.60	-10.8	-390	-800	-158	-1.7	-0.15	-0.009	0



У примјерима 5.11. – 5.13. нацртати логаритамске амплитудске и фазне фреквенцијске карактеристике за дате функције преноса.

Примјер 5.11

$$G(s) = \frac{1000(0.25s + 1)}{(10s + 1)(s + 1)(0.005s + 1)}$$

Рјешење:

Уврштавајући у $G(s)$: $s = j\omega$ добијамо

$$G(j\omega) = \frac{1000(0.25j\omega + 1)}{(10j\omega + 1)(j\omega + 1)(0.005j\omega + 1)}$$

Преломне фреквенције су :

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{1} = 1 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_3 = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_4 = \frac{1}{0.005} = 200 \text{ s}^{-1}.$$

Због прегледности се препоручује цртање логаритамских карактеристика у интервалу кружних фреквенција (ω_n , ω_r) гдје је ω_n за декаду мања од најмање, а ω_r већа од највеће преломне фреквенције. Логаритамска амплитудска карактеристика је дата са :

$$L(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log 1000 + 20 \log \sqrt{1 + (0.25\omega)^2} - 20 \log \sqrt{1 + (10\omega)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + (0.005\omega)^2},$$

а фазна карактеристика изразом

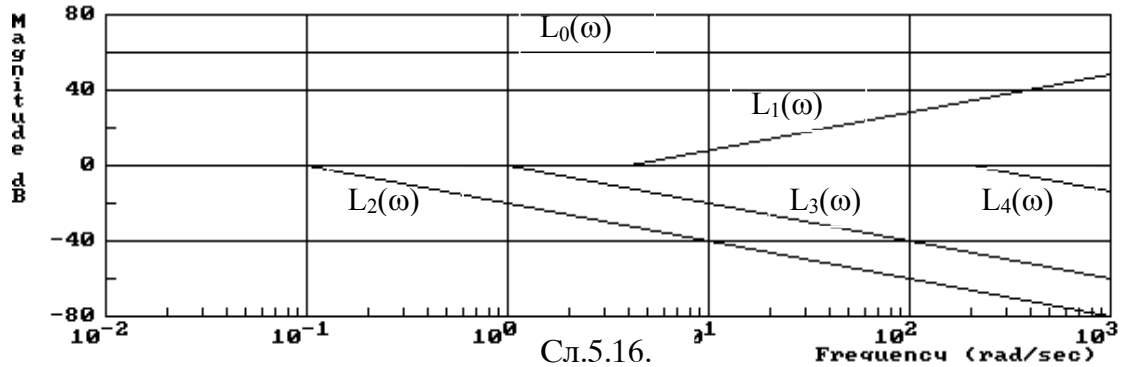
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctg 0.25\omega - \arctg 10\omega - \arctg \omega - \arctg 0.005\omega.$$

Види се да је укупна логаритамска амплитудска карактеристика дата сумом карактеристика које одговарају појединим сабирцима у изразу за $L(\omega)$:

$$L_0 = 20 \log 1000, \quad L_1(\omega) = 20 \log \sqrt{1 + (0.25\omega)^2}, \quad L_2(\omega) = -20 \log \sqrt{1 + (10\omega)^2},$$

$$L_3(\omega) = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2}, \quad L_4(\omega) = -20 \log \sqrt{1 + (0.05\omega)^2}.$$

Њихове асимптотске логаритамске карактеристике су дате на сл.5.16



Сл.5.16.

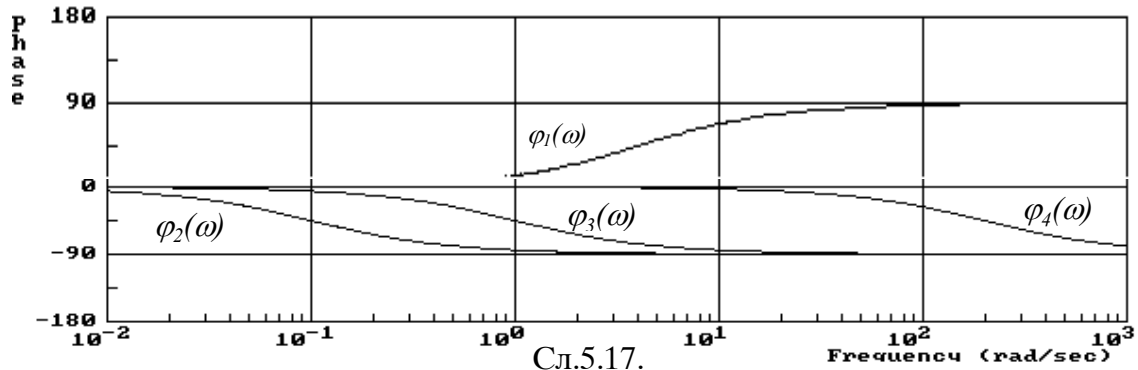
Табела 5.2.

ω	0.01	0.08	0.1	0.5	1.0	5	10	50	100	1000
$\varphi_1(\omega)$	0	0.6	1.5	7.5	14	51.5	67.5	85.5	87.5	90
$\varphi_2(\omega)$	-5.5	-26.5	-4.5	-78.5	-84.5	-89	-89.5	-90	-90	-90
$\varphi_3(\omega)$	-0.5	-3.5	-5.5	-26.5	-45	-78.5	-84.5	-89	-89.5	-90
$\varphi_4(\omega)$	0	0	0	0	-0.2	-1.5	-3.5	-14	-26.5	-78.5
$\varphi(\omega)$	-6	-29.4	-49	-97.5	-109.5	-117.5	-109	-107.5	-118.5	-168.5

Фазне карактеристике које одговарају сабирцима у изразу за $\varphi(\omega)$ су

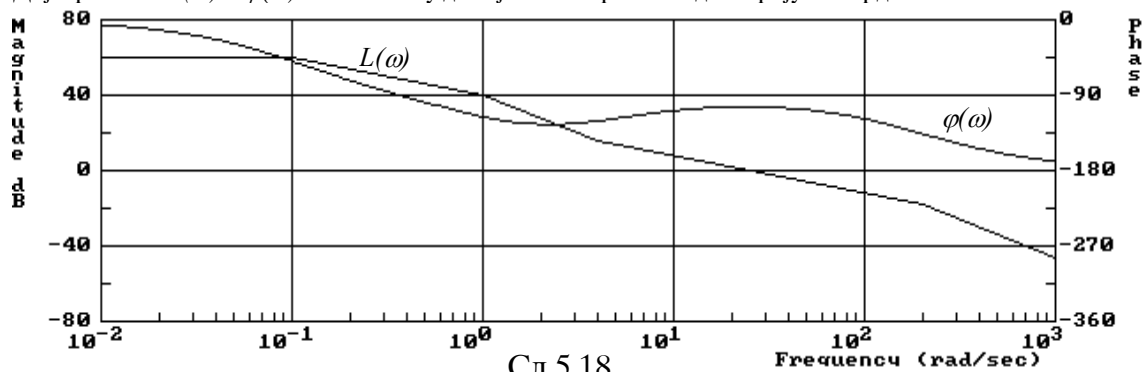
$$\varphi_1(\omega) = \arctg 0.25\omega, \quad \varphi_2(\omega) = -\arctg 10\omega, \quad \varphi_3(\omega) = -\arctg \omega, \quad \varphi_4(\omega) = -\arctg 0.005\omega.$$

дате табелом 5.2 и приказане на Сл.5.17.



Сл.5.17.

Дијаграми за $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ на сл.5.18 су добијени сабирањем одговарајућих ордината.



Сл.5.18.

Примјер 5.11

$$G(s) = \frac{k(T_1s + 1)}{s^2(T_2s + 1)(T_3s + 1)^2},$$

гдје је $k=0.13s^{-2}$, $T_1=5s$, $T_2=0.2s$, $T_3=0.01s$.

Рјешење:

Логаритамске карактеристике су одређене следећим изразима

$$L(\omega) = 20 \log k + 20 \log \sqrt{1 + (T_1\omega)^2} - 2 \cdot 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + (T_2\omega)^2} - 2 \cdot 20 \log \sqrt{1 + (T_3\omega)^2}.$$

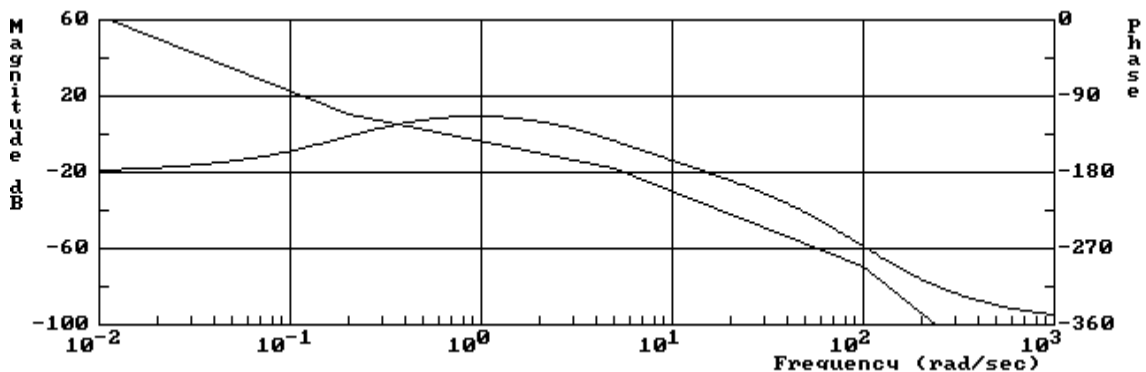
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega) = -180 + \arctg T_1\omega - \arctg T_2\omega - 2\arctg T_3\omega.$$

Према изразу за $\varphi(\omega)$ у табели 5.3 су дате вриједности фазе за поједине чланове. На основу табеле 5.3 и израза за $L(\omega)$ нацртане су тражене карактеристике на Сл.5.19.

Табела 5.3.

ω	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	4	5
$\varphi_1(\omega)$	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180
$\varphi_2(\omega)$	2	5.5	14	26.5	45	68	78.5	84.5	87	87.5
$\varphi_3(\omega)$	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-5.5	-11.5	-21.5	-38.5	-45
$\varphi_4(\omega)$	0	0	0	0	0	-0.5	-1	-2	-4	-5
$\varphi(\omega)$	-178	-175	-167	-155	-137	-118	-114	-119	-135	-142

ω	10	20	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
$\varphi_1(\omega)$	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180	-180
$\varphi_2(\omega)$	88.5	89.5	90	90	90	90	90	90	90	90
$\varphi_3(\omega)$	-63	-75.5	-84.5	-87	-88	-89.5	-90	-90	-90	-90
$\varphi_4(\omega)$	-11	-23	-53	-90	-126	-157	-169	-175	-177	-179
$\varphi(\omega)$	-165.5	-189	-227.5	-267	-304	-336.5	-349	-355	-357	-359

Примјер 5.12

$$G(s) = \frac{k(T_2s + 1)e^{-\tau s}}{(T_1^2s^2 + 2\zeta_1T_1s + 1)(T_3s - 1)},$$

гдје је $k=100$, $T_1=1s$, $T_2=0.2s$, $T_3=0.02s$, $\tau=0.02s$, $\zeta_1=0.1$.

Рјешење:

Ставимо

$$L_1(\omega) = -20 \log \sqrt{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + (2\zeta_1T_1\omega)^2}, \quad L_2(\omega) = 20 \log \sqrt{1 + (T_2\omega)^2},$$

$$L_3(\omega) = -20 \log \sqrt{1 + (T_3 \omega)^2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{T_1} = 1, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 5, \quad \omega_3 = \frac{1}{T_3} = 50,$$

онда је

$$L(\omega) = 20 \log k + L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega).$$

Пошто је $\zeta_1 = 0.1 \ll 1$ израчунајмо $L_1\left(\frac{1}{T_1}\right) = -20 \log 2\zeta_1 \cong 14$.

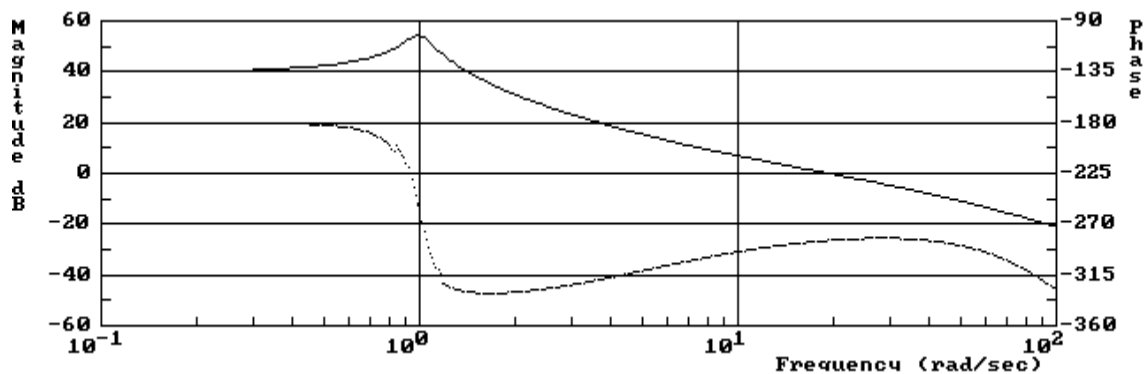
Такође ако узмемо да је

$$\varphi_1(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta_1 T_1 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}, \quad \varphi_2(\omega) = \arctg T_2 \omega, \quad \varphi_3(\omega) = -\pi + \arctg T_3 \omega, \quad \varphi_4(\omega) = -\tau \omega$$

имамо да је фазна карактеристика одређена са:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega).$$

Према горњим изразима су нацртани одговарајући дијаграми, Сл.5.13.



5.3 ЦРТАЊЕ ФРЕКВЕНЦИЈСКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ПОМОЋУ *MATLAB*-А.

За илустрацију поступка је дат изглед главног прозора за један примјер цртања Бодеових дијаграма Сл. 5.14. Прво је дефинисана функција преноса преко уношења коефицијената полинома бројника (b), а затим називника (n). Полиноми су дефинисани преко одговарајућих вектора. Претходно је урађено операцијама придруживања. Унесено је

```
b=[1 1]
```

након чега се типком *Enter* потврђује унос. На екрану се исписује дефинисани вектор да се може провјерити да ли је унос коректан и да ли такав како смо жељели. Ово је приказано на екрану са:

```
b =
```

```
1 1
```

Након тога је дефинисан вектор n уношењем:

```
n=[ 1 2 1]
```

Након активирања типке *Enter* потврђено је да је уношење извршено коректно. Ово је на слици представљено са:

```
n =
```

```
1 2 1
```

Сљедећа наредба дефинише функцију преноса елемента/система>
tf(b,n).

